INGRESO

2025

(*Modalidad presencial*)

FCEyS - UNMDP

ÍNDICE

EL ROL DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN UNIVERSITARIA

Desde el simple acto de contar hasta la resolución de problemas complejos, la matemática nos acompaña en cada paso que damos.

Su importancia radica en su capacidad para desarrollar nuestra habilidad de razonamiento lógico, mejorar nuestras capacidades de resolución de problemas y proporcionar herramientas fundamentales para comprender el mundo que nos rodea. En este sentido, se convierte en una herramienta esencial para el desarrollo personal y profesional de cada individuo. A través de sus métodos y conceptos, podemos analizar y resolver problemas en una amplia gama de campos.

La matemática es un lenguaje universal que trasciende las barreras culturales y lingüísticas. El lenguaje matemático se basa en símbolos y notaciones que representan conceptos abstractos. Estos símbolos tienen significados específicos y están conectados por relaciones y operaciones matemáticas. A través de esta estructura, podemos expresar ideas complejas de manera concisa y precisa.

La matemática desempeña un papel fundamental en el ámbito económico y financiero. Las empresas utilizan modelos matemáticos para tomar decisiones estratégicas, predecir la demanda de productos y optimizar sus operaciones. Los bancos y las entidades financieras utilizan complejas fórmulas matemáticas para evaluar riesgos, calcular tasas de interés y determinar el valor de los activos.

APROXIMACIÓN A LA MATEMÁTICA: NUESTRA PROPUESTA DE TRABAJO

En este módulo compartimos una serie de ejercicios y problemas que consideramos introductorios para acercarte a los contenidos matemáticos que se incluyen en las distintas carreras de la Facultad.

Te proponemos que intentes resolverlos y, además, te ofrecemos las respuestas de ellos y un marco conceptual o teórico con ejemplos desarrollados para que encuentres herramientas para abordar cada tema.

Te damos la bienvenida y te invitamos a vivenciar los encuentros tutoriales como una oportunidad para aproximarte a la vida universitaria.

Equipo docente de Aproximación a la Matemática

PRIMERA PARTE

CONTENIDOS:
Conjuntos numéricos. Propiedades en Reales. Radicales. Porcentaje. Logaritmos y propiedades. Ecuaciones lineales, con módulo y cuadráticas. Inecuaciones lineales y cuadráticas. - Sistemas de ecuaciones lineales y mixtos. Expresiones algebraicas enteras. Operaciones con polinomios. Factorización. Expresiones algebraicas racionales. Ecuaciones racionales.

Ejercicio 1: Analiza si las siguientes afirmaciones son Verdaderas (V) o Falsas (F). Justifica tu respuesta.

a) $-32 \in$ Q
b) $-\frac{8}{3} \in$ I
c) $\sqrt[5]{20} \in$ Q
d) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} \in$ Q
e) $-\sqrt[3]{-27} \in$ I
f) $\sqrt{\frac{64}{49}} \in$ Z

Ejercicio 2: Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas (V) o Falsas (F). Justifica tu respuesta.

a) La suma de dos números racionales es siempre otro número racional.
b) El producto de dos números irracionales es siempre otro número irracional.
c) La suma de un número racional con un irracional es siempre un número racional
d) La raíz cuadrada de un número racional es siempre un número irracional.
e) El producto de dos números reales es siempre otro número real.

Ejercicio 3*:* Resuelve cada expresión.

a) $-3^2 =$
b) $(-3)^2 =$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (-3)^2 =$
d) $5^4 . 5^{-2} =$
e) $\frac{10^7}{10^4} =$
f) $\frac{3}{3^{-2}} =$
g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} =$
h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} =$
i) $\frac{2^{-3}}{3^0} =$
j) $(-32)^{\frac{2}{5}} =$

Ejercicio 4: Resuelve las siguientes operaciones.

a) $\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$

c) $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=$

d) $1+\frac{5}{8}-\frac{1}{6}=$

e) $0{,}25\ \cdot\left(\frac{8}{9}+\frac{1}{2}\right)=$

f) $\left(3+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)=$

g) $\frac{2}{\frac{2}{3}}-\frac{\frac{2}{3}}{2}=$

h) $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{9}}=$

i) $\frac{2-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=$

j) $\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}+\frac{3}{15}}=$

Ejercicio 5: Desarrolla y escribe la mínima expresión.

a) 3 (x + y)
b) (a – b) . 8
c) 4 . (2m)
d) $\frac{4}{3}$ (-6y)
e) $-\frac{5}{2}$ (2x – 4y)
f) 3a (3 + c – 2a)
g) 8 (2x + 5) – 7 (x – 9)
h) 5 (3t – 4) – (t^2 + 2) – 2t (t – 3)
i) (4a – 1) (2a + 5)
j) (x + 3y) (2x – y)
k) (3x – 4) (3x + 4)
l) $(3x + 4)^2$
m) $(1 – 2y)^2$

Ejercicio 6: Simplifica cada expresión aplicando propiedades.

a) $x^8 . x^2$
b) $3y^2 . 4y^5$
c) $x^2 . x^{-6}$
d) $w^{-2}. w^{-4} . w^6$
e) $(2z^2)^{-5} . z^{10}$
f) $\frac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$

Ejercicio 7: Sean a, b y c números reales con a > 0, b < 0 y c > 0. Determina el signo de cada expresión.

a) b^5
b) b^{10}
c) ab^2c^3
d) $(b – a)^3$
e) $(b – a)^4$
f) $\frac{a^3c^3}{b^6c^6}$

Ejercicio 8: Evalúa cada expresión para x = 3, y = 4 y z = -1

a) $\sqrt{x^2+\ y^2}$
b) $\sqrt[4]{x^3+14y+2z}$
c) $(9x)^{\frac{2}{3}}+\ (2y)^{\frac{2}{3}}+\ z^{\frac{2}{3}}$
d) $(xy)^{2z}$

Ejercicio 9: Completa:

Expresión radical	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt[3]{7^2}$			$\sqrt[5]{5^3}$		
Expresión exponencial			$4^{\frac{2}{3}}$	$11^{-\frac{3}{2}}$		$2^{-1,5}$	$a^{\frac{2}{5}}$

Ejercicio 10: Extrae factores del radical.

a) $\sqrt{8} =$

b) $\sqrt[3]{16} =$

c) $\sqrt{\frac{27}{4}} =$

d) $\sqrt[3]{-125 =}$

e) $\sqrt[3]{\frac{729}{512}} =$

f) $4\sqrt{8b^3a^7} =$

g) $\sqrt{4x^6y^{12}} =$

Ejercicio 11: Introduce factores en el radical.

a) $2x\sqrt{x} =$

b) $3\sqrt[3]{3} =$

c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9} =$

d) $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x} =$

e) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy} =$

f) $3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx} =$

g) $\frac{2}{a}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}} =$

h) $\frac{3}{2x^2}\sqrt{8} =$

Ejercicio 12: Resuelve las siguientes operaciones aplicando propiedad distributiva.

a) $(7 - 2\sqrt{3})\ (2\sqrt{3} + 7)$

b) $(2 + \sqrt{3})\ (2 - \sqrt{3})$

c) $(5 + \sqrt{7})\ (3 + \sqrt{7})$

d) $\sqrt{2}\ (3\sqrt{6} - 5\sqrt{5})$

Ejercicio 13: Resuelve y expresa la respuesta sin radicales en el denominador.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{\frac{x}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{x}}$, $x \neq 0$

d) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

e) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Ejercicio 14: Indica verdadero (V) o falso (F). Justifica tu respuesta presentando el desarrollo correspondiente.

a) Si a, b ∈ R, entonces $a\,.\,\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$ …

b) Si a > 0, entonces $a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a^3}}$ …

c) $a^{\frac{6}{4}} = \sqrt{a^3}$ …

d) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2 \in Q$ …

e) $\left(3-\sqrt{2}\right)^3 = 27 - \sqrt{8}$ …

f) $\left(a-\sqrt{3}\right).\left(a+\sqrt{3}\right) = a^2 - 3$ …

Ejercicio 15: Indica cuáles de las siguientes expresiones u operaciones con números racionales representan.

a) el 30% de 16

$\frac{30}{100} + 16$	$\frac{30}{100} \cdot 16$	$\frac{30}{100} : 16$	0,3 . 16	4,8

b) el 12% de 25

$\frac{12}{100} : 25$	0,12 . 25	$\frac{12}{100} \cdot 25$	3	$\frac{12}{100} + 25$

Ejercicio 16: Resuelve las siguientes situaciones.

a) Una empresa tiene 180 empleados, de los cuales el 35% trabaja en el turno de noche. ¿Cuántos empleados hay en el turno de noche?

b) Un pasaje de avión a París costaba el verano pasado € 460. Si este año ha subido un 20 %, ¿cuánto cuesta ahora?

c) Un pueblo tenía el año pasado 30000 habitantes y este año tiene 31500. ¿Qué porcentaje ha aumentado la población?

d) Un reloj valía $ 64000 pero obtuve una rebaja y he pagado, finalmente, $57 600. ¿Qué porcentaje me han rebajado?

Ejercicio 17: Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición.

a) $\log_2 64 =$

b) $\log_{10} 100 =$

c) $\log_9 9 =$

d) $\log_2 \sqrt{2} =$

e) $\log_5 1 =$

f) $\log_{10} 0{,}01 =$

g) $\log_3 3^2 =$

h) $\log_{\frac{1}{2}} 2 =$

Ejercicio 18: Si $\log_b m = 16$ y $\log_b p = 9$ con $b \in R^+ - \{1\}$ y $p \in R^+$, entonces:

a) $\log_b (m\,.\,p) =$

b) $\log_b (m : p) =$

c) $\log_b (m\,.\,b) =$

d) $\log_b m^3 =$

e) $\log_b \sqrt[4]{m} =$

f) $\log_b \frac{1}{p} =$

Ejercicio 19: Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $-7x = 15 - 2x$
b) $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$
c) $(x - 4)^2 = (x + 4)^2 + 32$
d) $3x^2 - 27 = 0$
e) $6x(x - 1) = 21 - x$
f) $(3x + 2)^2 = 1$
g) $x(x - 8) + 3x^2 = 2(x - 2)(2x + 1)$
h) $(x - 1)^3 = x^2(x - 3) + x$

Ejercicio 20: Plantea y resuelve aplicando ecuaciones.

a) ¿Cuál es el número que sumado a su doble da 27?
b) En una clase de matemática hay 52 estudiantes. Si el número de chicos es 7 más que el doble de chicas, determina el número de chicas en la clase.
c) Juan compra un electrodoméstico en efectivo, le hacen un descuento del 9% y paga $12 750. ¿Cuál era el precio del mismo?
d) Durante una venta de liquidación un artículo tiene marcada una rebaja de 20%. Si su precio de liquidación es $ 2000, ¿cuál era su precio original?
e) Un comerciante ofrece 30% de descuento sobre el precio marcado de un artículo, y aun así obtiene una ganancia del 10%. Si al comerciante le cuesta $ 350 el artículo, ¿cuál debe ser el precio marcado?

Ejercicio 21: Resuelve las siguientes inecuaciones. Expresa la solución mediante intervalos.

a) $6 - x \geq 2x + 9$
b) $4 - 3x \leq -(1 + 8x)$
c) $5 \leq 3x - 4 \leq 14$
d) $-2 < 8 - 2x \leq -1$
e) $(x + 2)(x - 3) < 0$
f) $x(2x + 7) \geq 0$

Ejercicio 22*:* Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $|3 - 4x| = 1$
b) $|x + 4| = 0$
c) $|-3x| + |x| = 4$
d) $|4x + 8| - 2|x + 2| = 8$

Ejercicio 23: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante los métodos de igualación (a y b) , sustitución (c y d) y reducción por sumas y/o restas (e y f):

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}y + 1 = \frac{1}{2}x \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y - 2 = 9 \\ x - y + 1 = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3(2x - y) = x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x = 2 + 2y \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = x \\ y - x = 2y \end{cases}$

Ejercicio 24: Resuelve analíticamente los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y = 9 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x + 5y^2 = 75 \end{cases}$

Ejercicio 25: Determina el/los valor/es de ¨k¨ para que cada sistema sea: compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

a) $\begin{cases} k^2x - y = k \\ 3x - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = k^2x - k^2 + 1 \\ y = 2kx - x \end{cases}$

Ejercicio 26: Dada la expresión $\mathbf{P(x) = 4x^2 - x^3 - 4x + 7 + x^2 - 4 + 2x + 6x^3 - 5x^2}$

a) Escribe el polinomio reducido correspondiente.
b) Indica: el grado de P(x), el coeficiente principal y el término independiente.

Ejercicio 27: Determina los valores reales a, b y c para que se verifique P(x) = Q(x).

a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 1$ y $Q(x) = (a + 1)x^3 + bx^2 + c$.
b) $P(x) = -x^5 + 2x^3 - x$ y $Q(x) = -(a + b)x^5 + 2x^3 + bx^4 - x + c$.

Aclaración: dos polinomios de igual grado son iguales si los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales

Ejercicio 28: Dados $P(x) = 2x^2 + x - 5$; $Q(x) = 4x^2 + 3x - x^4 + 4 + 2x^3$; $R(x) = x^3 - x$ y $S(x) = -x - 2x^3 + 8 - x^2$, halla:

a) P(x) + Q(x) + R(x)
b) 2 P(x) – 3 R(x)
c) Q(x) – x . R(x)
d) S(x) . P(x)
e) R(x) . S(x)
f) $[3R(x)]^2$
g) $R(x)^3$

Ejercicio 29: Resuelve aplicando la regla de Ruffini. Indica cociente y resto.

a) $(x^3 - x^2 - 17x - 8) : (x - 5)$
b) $(x^2 - 2x^4 + 14 - x) : (x - 2)$
c) $(-x + 3x^5 + 2) : (x + 1)$
d) $(x^4 - 25x + x^2) : (x - 3)$

Ejercicio 30: Halla el valor numérico de $P(x) = x^2 - 7x + 10$ para x= 1, 2, 3 y 5. ¿Para cuáles de estos valores se anula? ¿Cómo se llama a esos valores?

Ejercicio 31: Factoriza los siguientes polinomios aplicando lo indicado en cada caso.

a) Extracción del factor común.

a.1) $P(x) = -2x + 6$ a.2) $P(x) = 2x^4 + 2x^2$ a.3) $P(x) = 3x^2 - 6x - 3x^3$

b) Diferencia de cuadrados.

b.1) $P(x) = x^2 - 9$ b.2) $P(x) = 4x^2 - 1$ b.3) $P(x) = x^4 - 16$

c) Fórmula resolvente (BHASKARA)

c.1) $P(x) = 2x^2 + 2x - 12$ c.2) $P(x) = -3x^2 + 9x - 6$ c.3) $P(x) = 4x^2 + 16x + 16$

d) Combinando los métodos que creas convenientes.

d.1) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x$ d.2) $P(x) = 3x^4 - 12x^2$ d.3) $P(x) = -2x^4 - 4x^3 + 6x^2$

Ejercicio 32: Simplifica, si es posible, cada fracción algebraica e indica todos los valores reales de la variable para los cuales la simplificación es válida.

a) $\dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{3x^3 + 3x^2}$

b) $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$

d) $\dfrac{x^2 - x}{x^4 - 2x^3 + x^2}$

Ejercicio 33: Realiza las siguientes operaciones, simplifica los resultados cuando sea posible.

a) $\dfrac{4x}{x^2-1} + \dfrac{3x}{1-x} =$

b) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} =$

c) $\dfrac{x}{2x-2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{5}{x} =$

d) $\dfrac{x+5}{x^2+3x-10} - \dfrac{2x+4}{x^2-4} =$

e) $\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2}\right) : \dfrac{4}{x^2-4} =$

f) $\dfrac{6x^2}{x^2-9} \cdot \dfrac{2x^2-2x-12}{3x^2} =$

Ejercicio 34: Resuelve las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta los valores que no anulan el denominador.

a) $\frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}$

b) $x - \frac{6}{x} = -5$

c) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{15}{x^2}$

d) $2 - \frac{5}{2x} = \frac{2x}{x+1}$

e) $\frac{x+4}{3x-6} - \frac{x-6}{4x-8} = \frac{x+1}{x-2}$

f) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{x^2-3x+2}$

SEGUNDA PARTE

CONTENIDOS:
Funciones. Funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, irracionales, por tramos, exponenciales y logarítmicas. Método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales y mixtos. Sistemas de mediciones angulares. Funciones trigonométricas. Identidades trigonométricas.

Ejercicio 1: Dada f(x) = 2x + 1, halla:

a) f(1)
b) f(-2)
c) f($\frac{1}{2}$)
d) f(a)
e) f(-a)
f) f(a+b)

Ejercicio 2: Dadas las siguientes funciones, evalúa las expresiones indicadas.

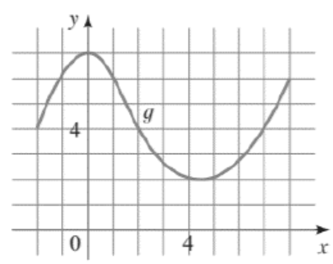
a) f(x) = x^2 + 1; halla f(x)+f(2) y f(x+2)
b) f(x) = 3x – 1; halla f(2x) y 2 f(x)
c) f(x) = x + 4 ; halla f(x^2) y $[f(x)]^2$

Ejercicio 3: Dadas las siguientes funciones, encuentra f(a), f(a+h) y f(a+h) – f(a).

a) f(x) = 3x + 2
b) f(x) = 5
c) f(x) = x^2 – 1
d) f(x) = 3 – 5x + $4x^2$

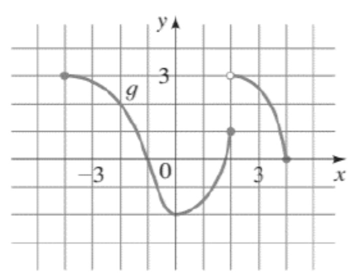
Ejercicio 4: Dado el gráfico de la función g(x) halla:

a) g(-2), g(0) y g(7).
b) El dominio y la imagen de g.
c) Los valores de x para los cuales g(x)= 4.
d) Los valores de x para los cuales g(x) > 4.



Ejercicio 5: Dado el gráfico de la función g(x) halla:

a) g(-4), g(-2), g(0), g(2) y g(4).
b) El dominio y la imagen de g.

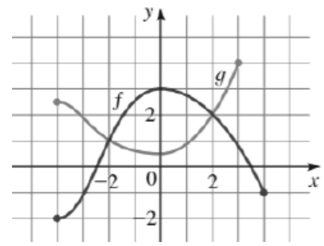


Ejercicio 6: Se dan las gráficas de las funciones f(x) y g(x).

a) ¿Cuál es mayor, f (0) o g(0)?

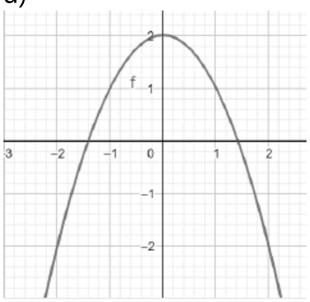
b) ¿Cuál es mayor, f (-3) o g(-3)?

c) ¿Para qué valores de x es f (x) = g(x)?

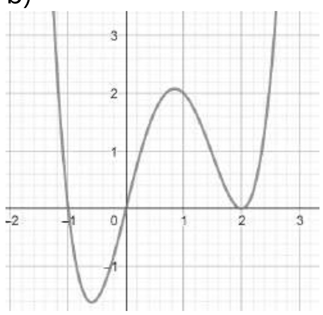


Ejercicio 7: Indica si los siguientes gráficos corresponden a funciones de R en R. Justifica la respuesta.

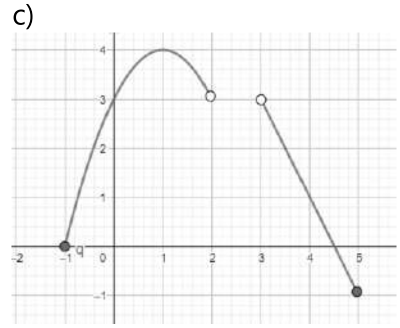
a)



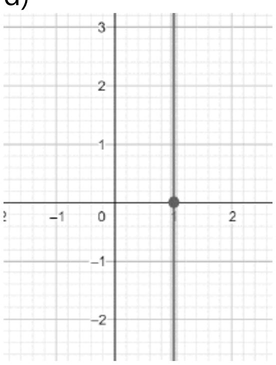
b)



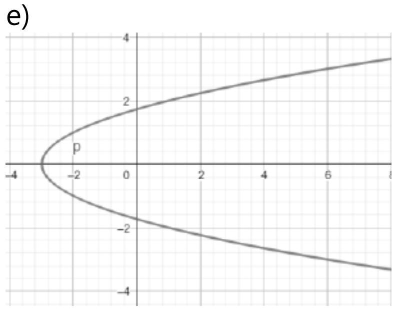
c)



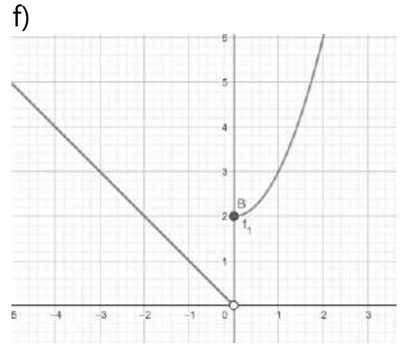
d)



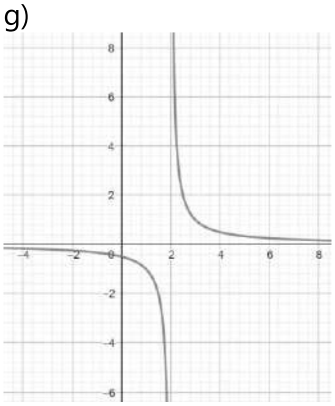
e)



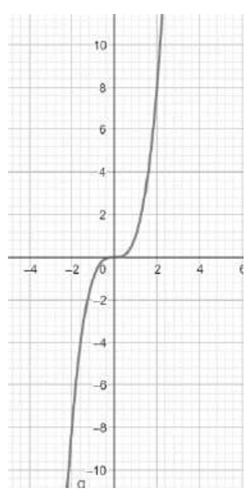
f)



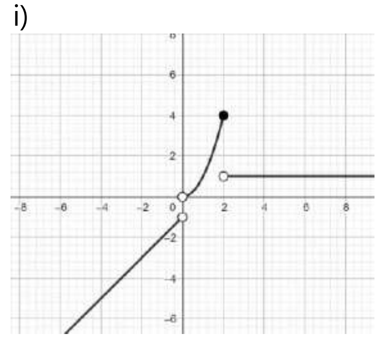
g)



h)



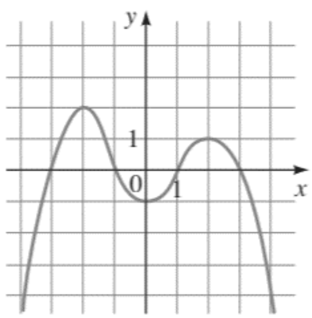
i)



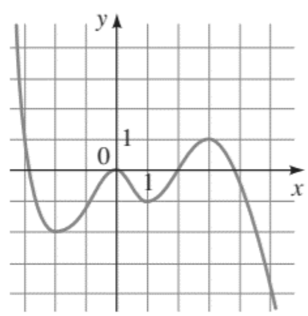
Ejercicio 8: Dados los gráficos de las siguientes funciones, halla:

- Los valores máximos y mínimos relativos y el valor de x en el que ocurre cada uno.
- Los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente.

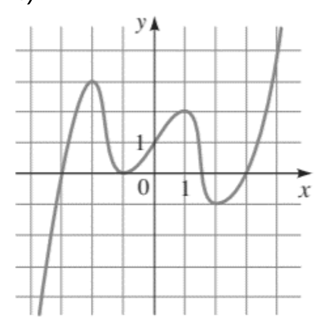
a)



b)

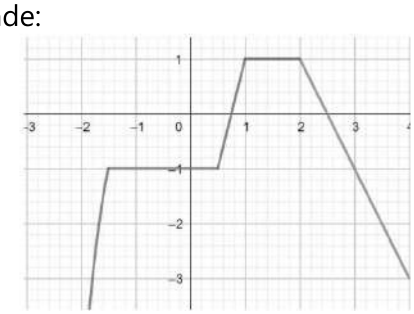


c)



Ejercicio 9: Observa el gráfico de la función f y responde:

a) f(-1,5) = … , f(1) = … y f(2) = …
b) ¿Para qué valores de x, f(x)= 1?
c) Las raíces son ....
d) f(x) es creciente en ....
e) f(x) es decreciente en ....
f) f(x) es constante en ....
g) C_+ .... y C_- ....



Ejercicio 10: Para cada ecuación, analiza si corresponde o no a funciones lineales. Para las que sean:

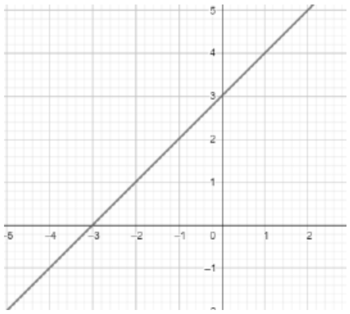
- Halla la ecuación explícita de la recta, la pendiente y la ordenada al origen.
- Grafica en un sistema de ejes cartesianos.
- Determina el dominio y la imagen.

a) $2x - y + 1 = 4$
b) $x - 5y = 20$
c) $x + 2 = 0$
d) $-\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
e) $\frac{3y-1}{2} = x + 1$
f) $1 + 2(y + x) = 2(x - 1) - 1$

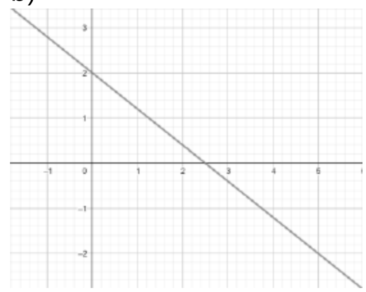
Ejercicio 11: Observa los siguientes gráficos de rectas y determina en cada uno de ellos.

- La ecuación explícita correspondiente.
- La raíz gráfica y analíticamente.
- Los conjuntos de positividad y negatividad.
- Los intervalos de crecimiento o de decrecimiento.

a)



b)



Ejercicio 12: Determina la ecuación de la recta que:

a) tiene pendiente $-\frac{2}{7}$ y pasa por el origen de coordenadas.

b) es una recta constante y pasa por (3,-2).

c) su pendiente es $\frac{1}{2}$ y pasa por $(\frac{1}{3},-1)$

d) pasa por los puntos (1,-2) y (-3,1)

e) corta al eje x en "2" y al eje y en -1

Ejercicio 13: Indica verdadero o falso y justifica tu respuesta.

a) el punto (0,3) pertenece a la recta de ecuación $y - 2x - 3 = 0$

b) el punto (1,3) no está en la recta $y= \frac{1}{3}x$

c) si k= -2 entonces $(\frac{1}{2}, 0)$ pertenece a la recta $3y + k.x + 7=0$

Ejercicio 14: Relaciona cada recta con la pendiente correspondiente.

a) $3x - 6y = 5$
b) Pasa por (-3 , 1) y (2 , -2)
c) Perpendicular a $3y + 5x = 4$
d) Paralela a $4x + 2y = 0$
e) Perpendicular a $x = 1$

- 4
- 0,5
- -0,6
- 0
- -2
- 0,6

Ejercicio 15: Dada la función polinómica de segundo grado $y = -x^2 - 2x + 15$, completa:

a) Los coeficientes de los términos de la función son: a = … , b = … y c = …
b) El vértice de la parábola es ……………..
c) El eje de simetría de la parábola es la recta ……………….
d) La ordenada al origen es …
e) Las raíces de la función son: x_1 = … y x_2 = …
f) El dominio de la función es …………….
g) La imagen de la función es ……………..

Ejercicio 16: Escribe las siguientes funciones en la forma más conveniente de acuerdo con los datos dados. Grafícalas y para cada una de ellas encuentra: dominio e imagen, conjuntos de ceros, de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos o mínimos.

a) El vértice es (–3 ; –2) y el coeficiente principal es –1.
b) Las raíces son –4 y 2 y el coeficiente principal es 2.
c) Una raíz es 4 y la otra es 0; el vértice es (2 ; 4).

Ejercicio 17: Analiza y resuelve las siguientes situaciones.

a) El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $R(x) = 12x - 0{,}01x^2$ dólares. Determina el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?
b) El costo promedio por unidad (en dólares) al producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 20 - 0{,}06x + 0{,}0002x^2$. ¿Qué número de unidades producidas minimizarían el costo promedio? ¿Cuál es el correspondiente costo mínimo por unidad?

Ejercicio 18: Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}y + 1 = \frac{1}{2}x \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

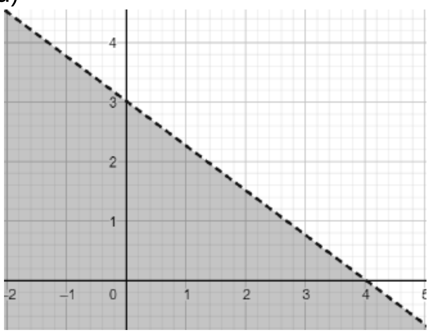
b) $\begin{cases} 3x + y - 2 = 9 \\ x - y + 1 = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x = 2 + 2y \end{cases}$

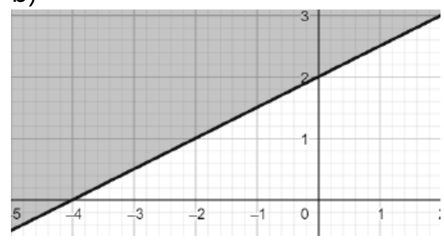
d) $\begin{cases} 2x + y = x \\ y - x = 2y \end{cases}$

Ejercicio 19: Describe mediante desigualdades las regiones sombreadas en cada figura.

a)



b)



Ejercicio 20: Representa la zona dada por las siguientes desigualdades.

a) $y \leq \frac{x}{3} + 3$ e $y \geq x - 1$

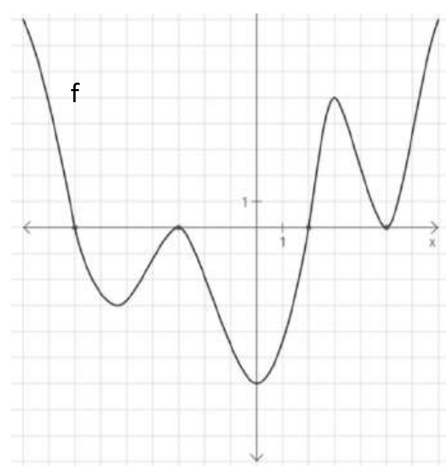
b) $y \leq -x + 2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Ejercicio 21: Determina gráficamente la solución de los sistemas.

a) $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x + 1 \\ y - x \leq 1 \end{cases}$

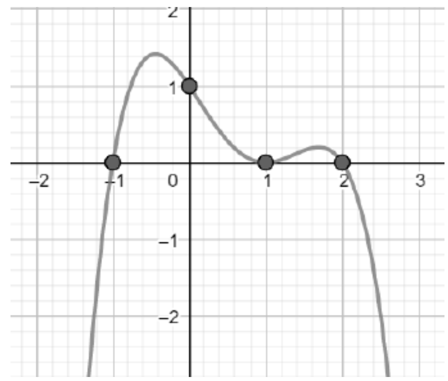
b) $\begin{cases} y \leq -(x-1)^2 + 3 \\ y \geq x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

Ejercicio 22: Observa la gráfica de la función f(x) y completa.



a) La intersección con el eje y es el punto ....
b) C_0 = ...
c) La multiplicidad de cada una de las raíces es *impar* para .... y *par* para ....
d) C_+ = ... y C_- = ...
e) Si el grado de la función es 6, f(x) = ...
f) Im f(x) = ...

Ejercicio 23: Observa la gráfica de la función g(x) y completa.



a) La intersección con el eje y es el punto ………….
b) C_0 = …………………
c) La multiplicidad de cada una de las raíces es *impar* para …………….. y *par* para ……………..
d) C_+ = ………………………. y C_- = ……………………………
e) Si el grado de la función es 4, f(x) = ………………………………

Ejercicio 24: Grafica aproximadamente las siguientes funciones polinómicas determinando previamente: raíces, multiplicidad, C_+ y C_- e intersecciones con los ejes coordenados.

a) $f(x) = (x-1)(x+2)^2$
b) $f(x) = (x-3)^2\,(x-1)$
c) $f(x) = (x-2)\,(x^2-1)$
d) $f(x) = x\,(x-1)(x+2)^2$

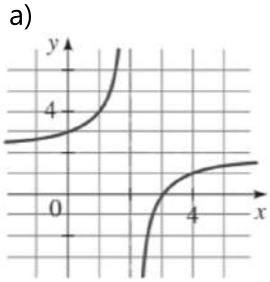
Ejercicio 25: Representa gráficamente las siguientes funciones, determinando previamente su dominio, ordenada al origen, raíces y asíntotas.

a) $f(x) = -\frac{2}{x}$
b) $f(x) = \frac{-2x}{x+3}$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$
e) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

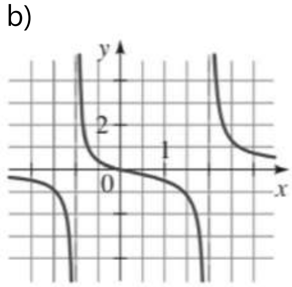
Luego, para cada una, determina: Im f, C_0, C_+, C_-, Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Ejercicio 26: Dadas las siguientes gráficas de funciones, determina el dominio, las intersecciones con el *eje x* y *el eje y*, las asíntotas verticales y horizontales y la Imagen.

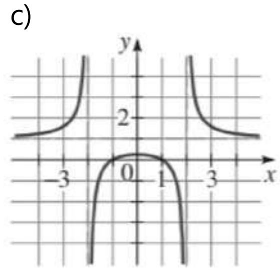
a)



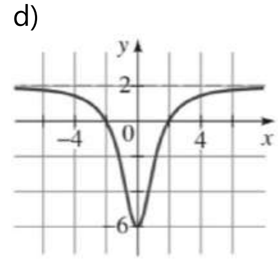
b)



c)



d)



Ejercicio 27: Encuentra analíticamente el dominio de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt[3]{-x+2}$

b) $f(x) = -\sqrt{x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{-x}$

e) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2+x-6}$

h) $f(x) = \sqrt{6-2x^2-4x}$

Ejercicio 28: Grafica las siguientes funciones en R.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le 2 \\ 2x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ -x+1 & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ -2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{3-x} & \text{si } x \le 3 \\ -x^2+6x-9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Ejercicio 29: Sombrea la región determinada por:

a) $\begin{cases} y \le x+1 \\ y < \frac{1}{x-1} \\ x > 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \le \sqrt{x} \\ y \le -x+6 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ejercicio 30: Indica V(verdadero) o F (falso). Justifica tu respuesta. Dada $f(x) = 4^x$

a) el punto (1 ; 0) pertenece a la gráfica.
b) el valor de k para que (-2 ; k) pertenezca a la gráfica es $\frac{1}{16}$.
c) el punto (-1 ; -4) pertenece a la gráfica.
d) el valor de k para que (k ; 2) pertenece a la gráfica es 16.

Ejercicio 31: Encuentra la fórmula de la función exponencial $f(x) = k \cdot a^x$, que cumpla con las condiciones enunciadas en cada caso.

a) $k = 3$ y pasa por el punto $(2 ; 12)$
b) pasa por los puntos $(0 ; -3)$ y $(-1 ; -12)$
c) corta al eje de las ordenadas en $y = -5$ y pasa por el punto $(-1 ; -50)$
d) pasa por los puntos $(6 ; -1)$ y $(3 ; -8)$

Ejercicio 32: Determina el dominio de f(x).

a) $f(x) = \log (3 - x)$
b) $f(x) = \ln (2x - 3)$
c) $f(x) = \log_{x-4} (x^2+16)$
d) $f(x) = \log_3 (x^2 - 4)$
e) $f(x) = \log_5 (x^2 + 5x + 6)$
f) $f(x) = \log_{x+1} (1 - x)$

Ejercicio 33: Resuelve las siguientes ecuaciones y escribe el conjunto solución.

a) $\log_{\sqrt{x}} 7 = 2$
b) $\log_4 x + 3 \log_4 x + 2 = 0$
c) $\log_x (3x + 10) = 2$
d) $\log_{x+1} 8 + \log_{x+1} 6 = 1$

Ejercicio 34: Convierte en radianes las siguientes medidas dadas en el sistema sexagesimal.

a) 60º
b) 210º
c) 135º

Ejercicio 35: Convierte al sistema sexagesimal las siguientes medidas dadas en el sistema circular.

a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{8}$
c) $\frac{7}{4}\pi$
d) $\frac{11}{6}\pi$
e) 2,8
f) 0,7

Ejercicio 36: Usa la calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondea la respuesta a dos decimales.

a) sen 28º
b) cos 14º
c) tg 21º
d) cotg 70º
e) cosec 55º
f) sec 41º
g) sen $\frac{\pi}{10}$
h) cos $\frac{\pi}{8}$
i) cotg $\frac{\pi}{18}$

Ejercicio 37: Analiza la gráfica de la función seno y responde.

a) ¿Cuál es la intersección con el eje y de la función y = sen x?
b) ¿Para qué números x, $-\pi \leq x \leq \pi$, la gráfica de y = sen x es creciente?
c) ¿Para qué números x, $-\pi \leq x \leq \pi$, la gráfica de y = sen x es decreciente?
d) ¿Cuál es el valor máximo de y = sen x?
e) ¿Para qué números x, $0 \leq x \leq 2\pi$, ocurre que sen x = 0?
f) ¿Para qué números x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, ocurre que sen x = 1? ¿Y sen x = -1?

Ejercicio 38: Analiza la gráfica de la función coseno y responde.

a) ¿Cuál es la intersección con el eje y de la función y = cos x?
b) ¿Para qué números x, $-\pi \leq x \leq \pi$, la gráfica de y = cos x es creciente?
c) ¿Para qué números x, $-\pi \leq x \leq \pi$, la gráfica de y = cos x es decreciente?
d) ¿Cuál es el valor máximo de y = cos x?
e) ¿Para qué números x, $0 \leq x \leq 2\pi$, ocurre que cos x = 0?
f) ¿Para qué números x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, ocurre que cos x = 1? ¿Y cos x = -1?

Ejercicio 39: Determina el valor de las restantes funciones trigonométricas, sabiendo que:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ y $x \in \mathrm{I}$
b) $\text{sen } x = \frac{3}{5}$ y $\cos x < 0$
c) $\text{tg } x = -\sqrt{2}$ y $\cos x > 0$
d) cotg x = 1 y sen x < 0

Ejercicio 40: Verifica las siguientes identidades, previa determinación de su dominio de validez:

a) sec x . sen x = tg x
b) cosec x . tg x = sec x
c) cosec x . cos x = cotg x
d) tg x . cotg x – $\cos^2$x = sen^2x
e) cos x (tg x + ctg x) = cosec x
f) cosec x − cos x . cotg x = sen x
g) (sen x – cos x) (sen x + cos x) = 2 sen^2 x − 1
h) (sen x + cos x) (cosec x − sec x) = cotg x − tg x
i) $\cos^2$ x . ($\sec^2$ x − tg^2 x) = $\cos^2$ x
j) tg x . (cos x − cosec x) = sen x – sec x

RESPUESTAS

PRIMERA PARTE:

1- a) V, -32 es un número entero y es racional. ($Z \subset Q$)
b) F, es una fracción por lo tanto es racional.
c) F, el resultado no es un número entero, no es racional por lo tanto es irracional.
d) V, es $\frac{2}{5}$ y es racional.
e) F, - (-3) = 3 y es racional.
f) F, es $\frac{8}{7}$ y no es entero.

2- V: a) y e)
F: b) contraejemplo: $\sqrt{3}.\sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$, es racional
c) contraejemplo: $0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$, es irracional
d) contraejemplo: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, es racional

3- a) -9
b) 9
c) $\frac{1}{9}$
d) $5^2 = 25$
e) $10^3 = 1000$
f) $3^3 = 27$
g) $4^2 = 16$
h) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$
i) $2^{-3} = \frac{1}{8}$
j) $(-2)^2 = 4$

4- a) $\frac{17}{30}$
b) $\frac{9}{20}$
c) $\frac{1}{15}$
d) $\frac{35}{24}$
e) $\frac{25}{72}$
f) $\frac{13}{20}$
g) $\frac{8}{3}$
h) 6
i) $\frac{15}{2}$
j) 3

5- a) $3x + 3y$
b) $8a – 8b$
c) $8m$
d) $-8y$
e) $-5x + 10y$
f) $9a + 3ac – 6a^2$
g) $9x + 103$
h) $-3t^2 + 21t – 22$
i) $8a^2 + 18a – 5$
j) $2x^2 + 5xy – 3y^2$
k) $9x^2 – 16$
l) $9x^2 + 24x + 16$
m) $1 – 4y + 4y^2$

6- a) x^{10}
b) $12y^7$
c) x^{-4}
d) 1
e) $\frac{1}{32}$
f) $4a^8b^{-9}$

7- Relaciona el signo de la base con el exponente (par o impar)
(+): b) c) e) y f) (-): a) d)

8- a) 5 b) 3 c) 14 d) $\frac{1}{144}$

9-

Expresión radical	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt[3]{7^2}$	$\sqrt[3]{4^2}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{11}\right)^3}$	$\sqrt[5]{5^3}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$	$\sqrt[5]{a^2}$
Expresión exponencial	$5^{-\frac{1}{2}}$	$7^{\frac{2}{3}}$	$4^{\frac{2}{3}}$	$11^{-\frac{3}{2}}$	$5^{\frac{3}{5}}$	$2^{-1,5}$	$a^{\frac{2}{5}}$

10- a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt[3]{2}$
c) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
d) -5
e) $\frac{9}{8}$
f) $8ba^3\sqrt{2ba}$
g) $2x^3y^6$

11- a) $\sqrt{4x^3}$
b) 9
c) $\sqrt[3]{\frac{72}{27}}$
d) $\sqrt{\frac{18x}{1728}}$
e) $\sqrt{\frac{144xy}{36}}$
f) $\sqrt{\frac{9}{3}m^3x^5}$
g) $\sqrt[3]{\frac{72}{16a^3}}$
h) $\sqrt{\frac{72}{4x^4}}$

12- a) 37 b) 1 c) $22 + 8\sqrt{7}$ d) $6\sqrt{3} - 5\sqrt{10}$

13- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3x}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2x}}{x}$ d) $\sqrt{3} + 1$ e) $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

14- V: a) b) c) d) y f) F: e) $45 - 29\sqrt{2}$

15- a) el 30% de 16

$\frac{30}{100} + 16$	$\frac{30}{100} . 16$ X	$\frac{30}{100} : 16$	0,3 . 16 X	4,8 X

b) el 12% de 25

$\frac{12}{100}: 25$	0,12 . 25 X	$\frac{12}{100}. 25$ X	3 X	$\frac{12}{100} + 25$

16- a) 63 empleados
b) cuesta € 552.
c) aumentó un 5%.
d) rebajado un 10%

17- a) 6
b) 2
c) 1
d) 0,5
e) 0
f) -2
g) 2
h) -1

18- a) 25
b) 7
c) 17
d) 48
e) 4
f) -9

19- a) S = {-3}
b) S = { $-\frac{3}{4}$ }
c) S = { -2 }
d) S = { -3 ; 3 }
e) S = { $-\frac{3}{2}$; $\frac{7}{3}$ }
f) S = { -1 ; $-\frac{1}{3}$ }
g) S = { 2 }
h) S = { $\frac{1}{2}$ }

20- a) El número es el 9
b) Hay 15 chicas en la clase
c) El precio era de $14 011
d) El precio original era de $2500
e) El precio marcado es $550

21- a) S = (-∞ ; -1]
b) S = (-∞ ; -1]
c) S = [3 ; 6]
d) S = [4,5 ; 5)
e) S = (-2 ; 3)
f) S = (-∞ ; -3,5] U [0 ; +∞)

22- a) S = { $\frac{1}{2}$; 1 }
b) S = { -4 }
c) S = { -1 ; 1 }
d) S = { -6 ; 2 }

23-
a) x = 0 ; y = -2
b) x = 4 ; y = -1
c) x = 0,5 ; y = 0,5
d) x = -2 ; y = -4
e) No tiene solución
f) Infinitas soluciones

24-
a) (-3 ; 9) y (4 ; 16)
b) (2 ; -2) y (-2 ; 2)
c) (-3 ; 0) y (2 ; 5)
d) (-25 ; -5) y (-25 ; 5)

25-

a) Compatible determinado: $k \in R - \{-3, 3\}$
Compatible indeterminado: $k = 3$
Incompatible: $k = -3$

b) Compatible determinado: $k \in R - \{1\}$
Compatible indeterminado: $k = 1$
Incompatible: $\nexists\, k \in R$

26- a) $P(x) = 5x^3 - 2x + 3$
b) grado: 3, coef. principal: 5, término independiente: 3

27- a) $a = 0$, $b = 5$ y $c = -1$
b) $a = 1$, $b = c = 0$

28- a) $-x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x - 1$
b) $-3x^3 + 4x^2 + 5x - 10$
c) $-2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 4$
d) $-4x^5 - 4x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 13x - 40$
e) $-2x^6 - x^5 + x^4 + 9x^3 + x^2 - 8x$
f) $9x^6 - 18x^4 + 9x^2$
g) $x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3$

29- a) $C(x) = x^2 + 4x + 3$; $R(x) = 7$
b) $C(x) = -2x^3 - 4x^2 - 7x - 15$; $R(x) = -16$
c) $C(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$; $R(x) = 0$
d) $C(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 5$; $R(x) = 15$

30- $P(1) = 4$; $P(2) = 0$; $P(3) = 38$ y $P(5) = 0$. Se anula para 2 y 5. Se llaman raíces o ceros.

31- a.1) $P(x) = -2(x - 3)$ a.2) $P(x) = 2x^2 (x^2 + 1)$ a.3) $P(x) = 3x(x - 2 - x^2)$
b.1) $P(x) = (x + 3)(x - 3)$ b.2) $P(x) = (2x + 1)(2x - 1)$ b.3) $P(x) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$
c.1) $P(x) = 2(x + 3)(x - 2)$ c.2) $P(x) = -3(x - 1)(x - 2)$ c.3) $P(x) = 4(x + 2)^2$
d.1) $P(x) = 2x(x - 3)(x + 1)$ d.2) $P(x) = 3x^2 (x + 2)(x - 2)$ d.3) $P(x) = -2x^2 (x + 3)(x - 1)$

32- a) $(x^2 + 4)(x + 2)$ con $x \neq 2$
b) $\frac{x}{x-3}$ con $x \neq 3$
c) $\frac{x-1}{3x^2}$ con $x \neq -1$
d) $\frac{1}{x\,(x-1)}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$

33- a) $\frac{-3x^2+x}{(x-1)(x+1)}$
b) $\frac{2}{x+1}$ con $x \neq 1$
c) $\frac{x^2-8x+10}{2x(x-1)}$
d) $\frac{-1}{x-2}$ con $x \neq -5$ y $x \neq -2$
e) -1 con $x \neq -2$ y $x \neq 2$
f) $\frac{4x+8}{x+3}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 3$

34-
a) $S = \{3\}$
b) $S = \{-6; 1\}$
c) $S = \{10\}$
d) $S = \{-5\}$
e) $S = \emptyset$
f) $S = \{-2\}$

SEGUNDA PARTE:

1- a) $f(1) = 3$
b) $f(-2) = -3$
c) $f(\frac{1}{2}) = 2$
d) $f(a) = 2a+1$
e) $f(-a) = -2a+1$
f) $f(a+b) = 2a+2b+1$

2- a) $f(x) + f(2) = x^2+6$; $f(x+2) = x^2+4x+5$
b) $f(2x) = 6x - 1$; $2.f(x) = 6x - 2$
c) $f(x^2) = x^2+4$; $f(x)^2 = x^2+8x+16$

3- a) $f(a) = 3a+2$; $f(a+h) = 3a+3h+2$; $f(a+h) - f(a) = 3h$
b) $f(a) = 5$; $f(a+h) = 5$; $f(a+h) - f(a) = 0$
c) $f(a) = a^2 - 1$; $f(a+h) = a^2+h^2+2ah - 1$; $f(a+h) - f(a) = h^2 + 2ah$
d) $f(a) = 3 - 5a+4a^2$; $f(a+h) = 3 - 5a - 5h+8ah +4a^2+4h^2$; $f(a+h) - f(a) = -5h + 8ah + 4h^2$

4- a) $g(-2) = 4$; $g(0) = 7$; $g(7) = 4$
b) Dom = R, Im = R
c) -2, 2 y 7
d) $(-2;2) \cup (7;+\infty)$

5- a) $g(-4) = 3$; $g(-2) = 2$; $g(0) = -2$; $g(2) = 1$; $g(4) = 0$
b) Dom g = $[-4 ; 4]$; Im g = $[-2 ; 3]$

6- a) $f(0) = 3$, $g(0) = 0,5$, $f(0) > g(0)$
b) $g(-3) = 2$, $f(-3) = -1$, $f(-3) < g(-3)$
c) -2 y 2

7- a), b) y f) y h): Sí
c) No. No cumple la condición de existencia, para $x \in [2 ; 3]$ no existe valor de y.
d) No. No cumple la condición de unicidad, para x = 1 hay infinitos valores de y.
e) No. No cumple la condición de unicidad, para x = 2 hay dos valores de y.
g) No. No cumple la condición de existencia, para x = 2 no existe valor de y.
i) No. No cumple la condición de existencia, para x = 0 no existe valor de y.

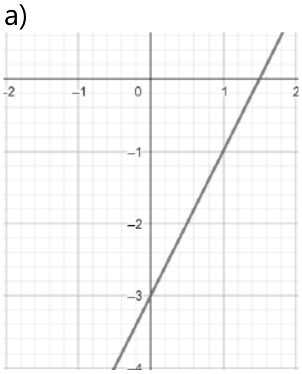
8- a) Máximos relativos: 2 en x = -2 y 1 en x = 2, I. crecimiento = $(-\infty , -2) \cup (0 , 2)$
Mínimo relativo: -1 en x = 0 I. decrecimiento = $(-2 , 0) \cup (2 , +\infty)$
b) Máximos relativos: 0 en x = 0 y 1 en x = 3, I. crecimiento = $(-2 , 0) \cup (1 , 3)$
Mínimos relativos: -2 en x = -2 y -1 en x = 1 I. decrecimiento = $(-\infty , -2) \cup (0 , 1) \cup (3 , +\infty)$
c) Máximos relativos: 3 en x = -2 y 2 en x = 1, I. crecimiento = $(-\infty , -2) \cup (-1 , 1) \cup (2 , +\infty)$
Mínimos relativos: 0 en x = -1 y -1 en x = 2 I. decrecimiento = $(-2 , -1) \cup (1 , 2)$

9- a) f(-1,5) = -1; f(1) = 1; f(2) = 1
b) x $\in$ [1 ; 2]
c) 0,75 y 2,5
d) f(x) es creciente en (-∞ ; -1,5) $\cup$ (0,5 ; 1)
e) f(x) es decreciente en (2 ; +∞)
f) f(x) es constante en (-1,5 ; 0,5) $\cup$ (1 ; 2)
g) C_+ = (0,75 ; 2,5) ; C_- = (-∞ ; 0,75) $\cup$ (2,5 ; +∞)

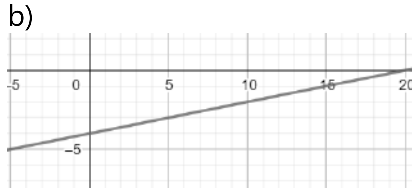
10-

	Ecuación	Pendiente	Ord. al origen	Dominio	Imagen
a	y = 2x – 3	2	-3	R	R
b	y = 0,2 x – 4	0,2	-4	R	R
c	---------------	-------------	---------------	------------	----------
d	y = -1,5x – 3	-1,5	-3	R	R
e	y = $\frac{2}{3}$ x + 1	$\frac{2}{3}$	1	R	R
f	y = -2	0	-2	R	{-2}

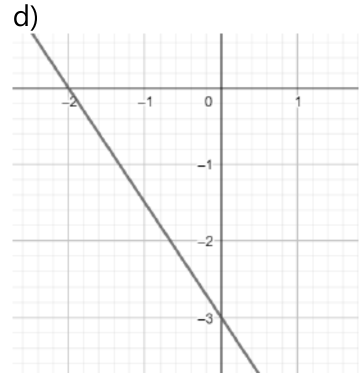
a)



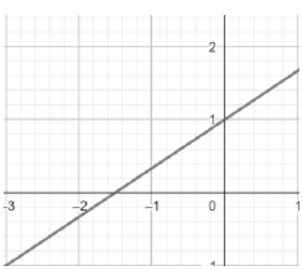
b)



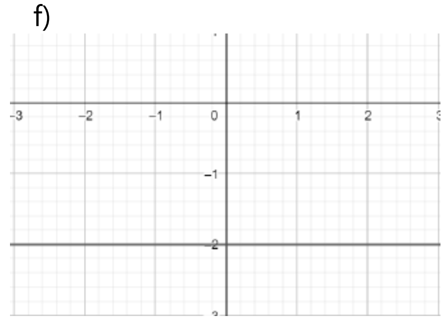
d)



e)



f)



11-

	a	b
Ecuación explícita	$y = x + 3$	$y = -\frac{4}{5}x + 2$
Raíz	-3	2,5
C_+	$(-3\ ,\ +\infty)$	$(-\infty\ ,\ 2{,}5)$
C_-	$(-\infty\ ,\ -3)$	$(2{,}5\ ,\ +\infty)$
Int. crecimiento	R	Ø
Int. decrecimiento	Ø	R

12- a) $y = -\frac{2}{7}x$
b) $y = -2$
c) $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}$
d) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$
e) $y = \frac{1}{2}x - 1$

13- a) V, al reemplazar el punto dado en la expresión obtenemos una identidad.
b) V, al reemplazar obtenemos una desigualdad $(3 \neq \frac{1}{3})$
c) F, al reemplazar obtenemos 6 = 0 y no es posible.

14- a) 0,5 b) -0,6 c) 0,6 d) -2 e) 0

15- a) a = -1; b = -2 y c = 15
b) (-1 ; 16)
c) x = -1
d) 15
e) $x_1 = -5$; $x_2 = 3$
f) R
g) $(-\infty\ ;\ 16]$

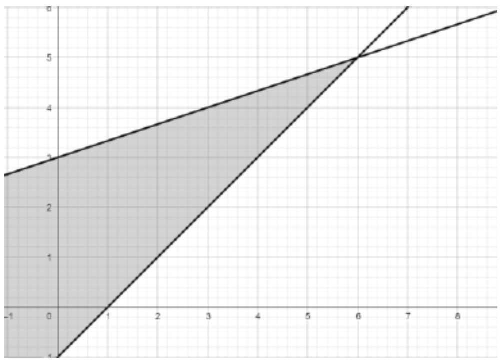
16- a) $y = -x^2 - 6x - 11$
b) $y = 2x^2 + 4x - 16$
c) $y = x^2 - 4x$

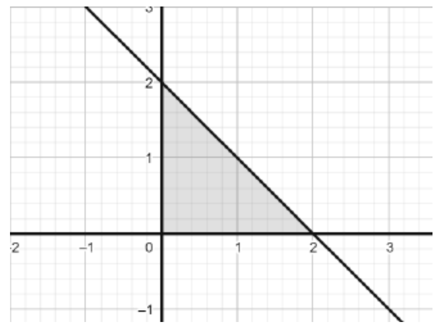
	Vértice	Dominio	Imagen	C_0	C_+	C_-	I. crec.	I. decrec.	Max/ Min
a)	(-3 ;-2)	R	$(-\infty;-2]$	Ø	Ø	R	$(-\infty; -3)$	$(-3\ ;\ +\infty)$	Max
b)	(-1;-18)	R	$[-18\ ;+\infty)$	{-4 ; 2}	$(-\infty; -4) \cup (2\ ;\ +\infty)$	(-4 ; 2)	$(-1\ ;\ +\infty)$	$(-\infty; -1)$	Min
c)	(2; 4)	R	$(-\infty;4]$	{0 ; 4}	(0 ; 4)	$(-\infty; 0) \cup (4\ ;\ +\infty)$	$(-\infty; 2)$	$(2\ ;\ +\infty)$	Min

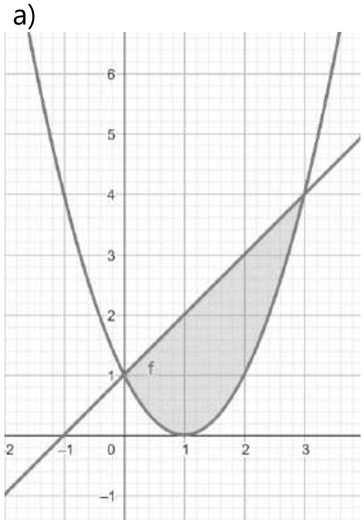
17- a) 600 unidades y el ingreso máximo de 3600 dólares
b) 150 unidades y el costo mínimo de $15,50

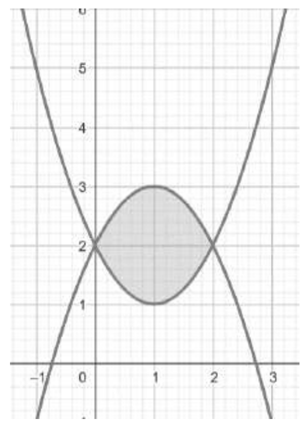
18- a) S = { (0 ; -2) } b) S = { (4 ; -1) } c) S = Ø d) S = { (x ; y) ∈ R, con y = -x }

19- a) $y < -\frac{3}{4}x + 3$ b) $y \geq \frac{1}{2}x + 2$

20- a) 

b) 

21- a) 

b) 

22- a) (0; -6)

b) C_0 = {-7; -3; 2; 5}

c) Impar: -7 y 2; par: -3 y 5

d) $C_+ = (-\infty; -7) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$ y $C_- = (-7; -3) \cup (-3; 2)$

e) $f(x) = \frac{1}{525}(x+7)(x+3)^2(x-2)(x-5)^2$

f) Im f = $[-6; +\infty)$

23- a) (0; 1)

b) C_0 = {-1; 1; 2}

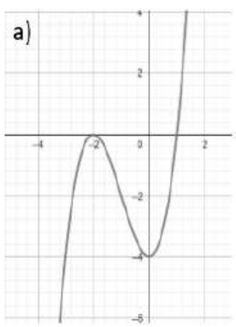
c) Impar: -1 y 2; par: 1

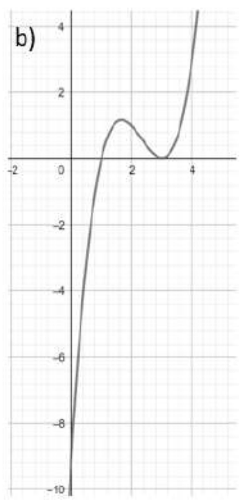
d) $C_+ = (-1; 1) \cup (1; 2)$ y $C_- = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

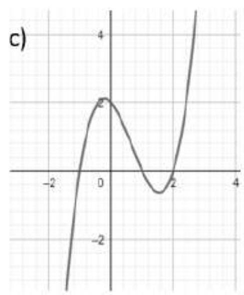
e) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-1)^2$

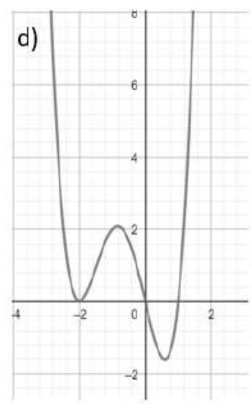
24-

	raíces	*Multiplicidad*	C_+	C_-	*Intersección con el eje x*	*Intersección con el eje y*
A	$x_1 = 1$ $x_2 = -2$	simple doble	$(1, +\infty)$	$(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$	(1,0) y (-2,0)	(0,-4)
B	$x_1 = 3$ $x_2 = 1$	doble simple	$(1, 3) \cup (3, +\infty)$	$(-\infty, 1)$	(3,0) y (1,0)	(0,-9)
C	$x_1 = 2$ $x_2 = 1$ $x_3 = -1$	simple simple simple	$(-1, 1) \cup (2, +\infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, 2)$	(-1,0), (1,0) y (2,0)	(0,2)
D	$x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = -2$	simple simple doble	$(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)$	(0,1)	(0,0), (1, 0) y (-2,0)	(0,0)





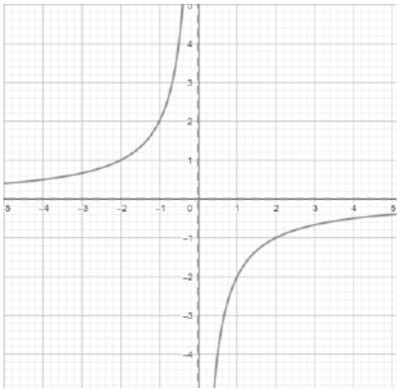




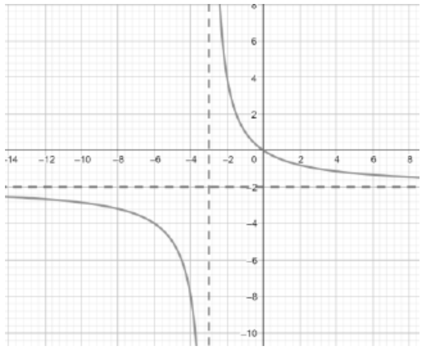
25-

	Dom	O.O	raíces	AV	AH	Im	C_0	C_+	C-	I Crec	I decrec
a	R-{0}	--	--	x = 0	y = 0	R-{0}	Ø	(-∞;0)	(0;+∞)	R-{0}	Ø
b	R-{-3}	0	0	x = -3	y = -2	R-{-2}	{0}	(-3;0)	(-∞;-3)∪(0;+∞)	Ø	R-{-3}
c	R-{0}	--	--	x = 0	y = 0	(0;+∞)	Ø	R-{0}	Ø	(-∞;0)	(0;+∞)
d	R-{-2}	-2	2	--	--	R-{-4}	{2}	(2;+∞)	(-∞;-2)∪(-2;2)	R-{-2}	Ø
e	R-{-2;2}	-0,5	--	x = 2	y = 0	R-{$-\frac{1}{4}$;0}	Ø	(2;+∞)	(-∞;-2)∪(-2;2)	Ø	R-{-2;2}

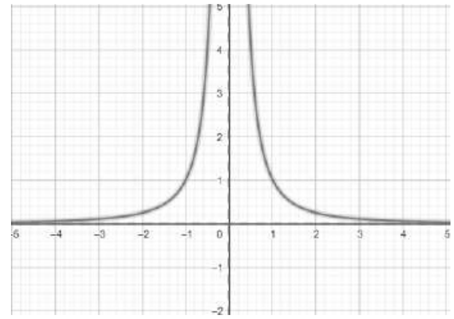
a)



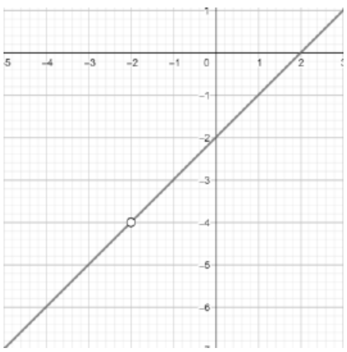
b)



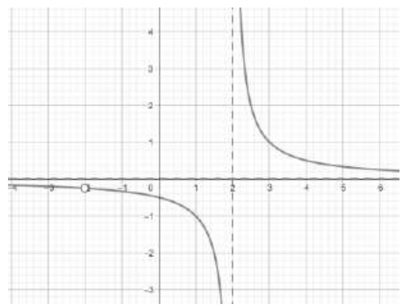
c)



d)



e)



26-

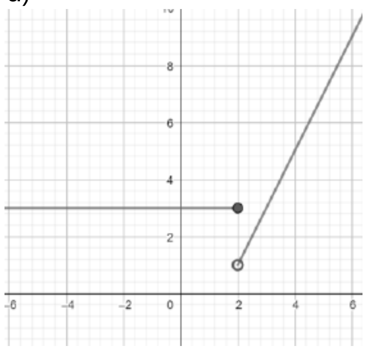
	Dom	Int. eje x	Int. eje y	AV	AH	Im
A	R-{2}	3	3	x = 2	y = 2	R-{2}
B	R-{-1;2}	0	0	x = -1 y x = 2	y = 0	R
C	R-{-2;2}	-1 y 1	0,25	x = -2 y x = 2	y = 1	(-∞;0,25]∪(1;+∞)
D	R	-2 y 2	-6	--	y = 2	[-6;2)

27-

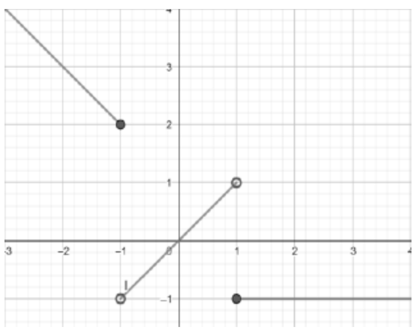
a) Dom = R
b) Dom = [-2 ; +∞)
c) Dom = [-1;1]
d) Dom = R
e) Dom = (-∞; 0,5]
f) Dom = (-∞ ; -2]∪[2 ;+∞)
g) Dom = (-∞ ; -3]∪[2 ;+∞)
h) Dom = [-3 ; 1]

28-

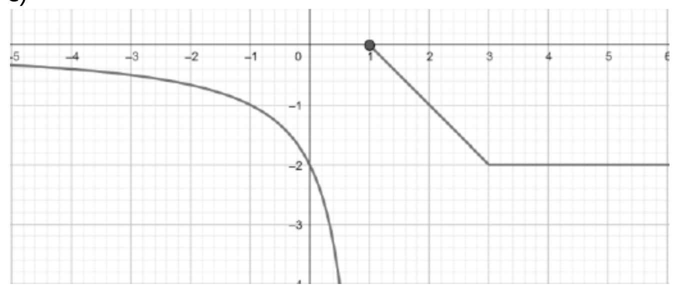
a)



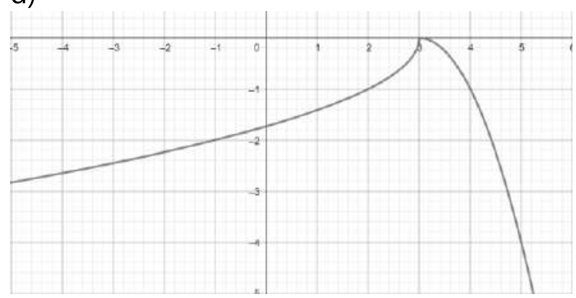
b)



c)

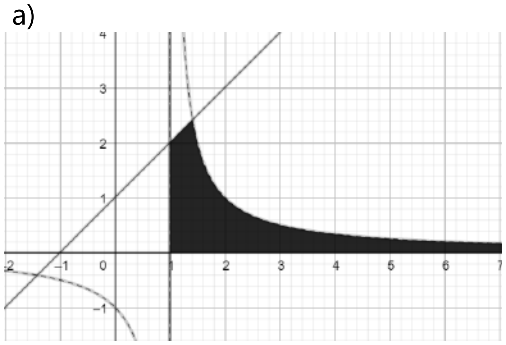


d)

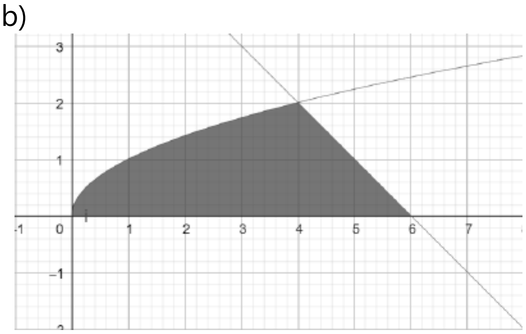


29-

a)



b)



30- a) F, f(1) = 4, (1 ; 4) está en la gráfica
b) V
c) F, f(-1) = $\frac{1}{4}$ (-1 ; $\frac{1}{4}$) está en la gráfica
d) F, k = 0,5

31- a) f(x) = 3 . 2^x
b) f(x) = -3 . $\left(\frac{1}{4}\right)^x$
c) f(x) = -5 . $\left(\frac{1}{10}\right)^x$
d) f(x) = -64 . $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

32- a) Dom = $(-\infty ; 3)$
b) Dom = $(1,5 ; +\infty)$
c) Dom = $(4 ; 5) \cup (5 ; +\infty)$
d) Dom = $(-\infty ; -2) \cup (2 ; +\infty)$
e) Dom = $(-\infty ; -3) \cup (-2 ; +\infty)$
f) Dom = $(-1 ; 0) \cup (0 ; 1)$

33- a) S = {7}
b) S = {0,5}
e) S = {5}
f) S = {47}

34- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{7}{6}\pi$ c) $\frac{3}{4}\pi$

35-
a) 30º
b) 22º 30´
c) 315º
d) 330º
e) 160º 25´ 41´´
f) 40º 6´ 25´´

36- a) 0,47   b) 0,97   c) 0,38   d) 0,36   e) 1,22   f) 1,33   g) 0,31   h) 0,92   i) 5,67

37- a) 0 ó (0 , 0)
b) $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
c) $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$
d) 1
e) $\{ 0, \pi, 2\pi \}$
f) $\{ -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ y $\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

38- a) En 1 ó (0 ,1)
b) $(-\pi , 0)$
c) $(0 , \pi)$
d) 1
e) $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$
f) $\{-2\pi , 0 , 2\pi\}$ y $\{-\pi , \pi\}$

39- a) sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg x = $\sqrt{3}$; cotg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; sec x = 2 ; cosec x = $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
b) cos x = $-\frac{4}{5}$; tg x = $-\frac{9}{20}$; cotg x = $-\frac{20}{9}$; sec x = $-\frac{5}{4}$; cosec x = $\frac{5}{3}$
c) sen x = $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; cos x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; cotg x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; sec x = $\sqrt{3}$; cosec x = $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
d) sen x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; tg x = 1 ; sec x = $-\sqrt{2}$; cosec x = $-\sqrt{2}$

NÚMEROS REALES

Los diferentes tipos de números reales fueron conocidos para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio litro de leche," y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

El siguiente esquema muestra la clasificación de números con los cuales trabajaremos.

Z^+ = N (Naturales)
0
Z^- (Enteros negativos)

Z (Enteros)

Decimales exactos
Decimales periódicos
Fraccionarios

Q (Racionales)

I (Irracionales)

R (Reales)

- Un número es **RACIONAL** si puede expresarse como cociente entre dos números enteros.
  Existen dos maneras de escribir un mismo número racional: como fracción o en forma decimal; una y otra designan exactamente el mismo número.
  La expresión decimal de un número racional tiene un número finito de cifras decimales, o es periódica.
  $\frac{34}{9} = 3{,}777... = 3{,}\overline{7}$ $\qquad -\frac{13}{4} = -3{,}25$ $\qquad \frac{17}{6} = 2{,}8333... = 2{,}8\overline{3}$

- Un número se llama **IRRACIONAL** cuando no puede ser expresado como un cociente entre dos números enteros por tener infinitas cifras decimales no periódicas.
  Todas las raíces no exactas de base entera son números irracionales.
  $\sqrt{5} = 2.236067...$ $\qquad \sqrt[3]{6} = 1.817120...$ $\qquad \sqrt[4]{21} = 2{,}140695...$

APROXIMACIÓN

Cuando se trabaja con números que tienen muchas o infinitas cifras decimales, se realizan aproximaciones cometiendo un pequeño **error** que es aceptado por razones de orden práctico.

Para **aproximar por redondeo** se considera la cifra siguiente a la última que se va a dejar; si es mayor o igual que 5, se suma uno a dicha cifra y si es menor, se deja igual.

$\frac{20}{3} = 6{,}6666... \cong 6{,}67 \ (\Delta < 0{,}01)$ $\qquad \frac{22}{3} = 7{,}3333... \cong 7{,}33 \ (\Delta < 0{,}01)$

Otra manera de **aproximar** es **por truncamiento**, que consiste en eliminar directamente las cifras que no desean considerarse.

$\sqrt{5} = 2{,}236067... \cong 2{,}23 \ (\Delta < 0{,}01)$ $\qquad e = 2{,}7182818... \cong 2{,}7182 \ (\Delta < 0{,}0001)$

OPERACIONES - PROPIEDADES

SUMA: Sean a, b y c $\in$ R.

1. Conmutativa: $a + b = b + a$
2. Asociativa: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
3. Existencia del elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$, 0 es el **neutro**
4. Existencia del elemento opuesto: $a + (-a) = (-a) + a = 0$, -a es el **opuesto** de a

MULTIPLICACIÓN: Si a, b y c $\in$ R.

1. Conmutativa: $a . b = b . a$
2. Asociativa: $a . b . c = (a . b) . c = a . (b . c)$
3. Existencia del elemento neutro: $a . 1 = 1 . a = a$, 1 es el **neutro**
4. Existencia del elemento inverso: $a . a^{-1} = a^{-1} . a = 1$, a^{-1} es el **inverso** de a, con $a \neq 0$

DISTRIBUTIVA: Si a, b y c $\in$ R, $(a + b) . c = a . \mathbf{c} + b . \mathbf{c}$

Al proceso inverso se denomina ***extracción de factor común***

Ejemplo: $3\mathbf{m}n + 2\mathbf{m} = \mathbf{m}(3n + 2)$, **m** es el factor común

POTENCIACIÓN

Potencia de exponente natural:

Si a $\in$R y n $\in$ N, siendo $n \geq 1$, se define $a^n = \underbrace{a . a . a . \dots . a}_{n \text{ factores}}$

a: base
n: exponente

- *El exponente (n) indica las veces que se debe multiplicar la base.*

PROPIEDADES: Si a, b $\in$ R y n , m $\in$ N,

- $a^0 = 1$
- $a^n . a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(a . b)^n = a^n . b^n$
- $(a : b)^n = a^n : b^n$, $b \neq 0$

Potencia de exponente entero: Si a $\in$R - {0} y n $\in$ Z^+, se define $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

ACLARACIÓN: La potenciación NO es distributiva con respecto a la suma y a la resta.

- $(a + b)^n \neq a^n + b^n$
- $(a - b)^n \neq a^n - b^n$

Ejemplos:

- $5^0 = 1$
- $x^{-1} = \frac{1}{x}$
- $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$
- $x^4 . x^7 = x^{4+7} = x^{11}$
- $y^4 . y^{-7} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$
- $\frac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$
- $(b^4)^5 = b^{4.5} = b^{20}$
- $(3x)^3 = 3^3 . x^3 = 27x^3$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES CON EXPONENTES

Ejemplo: $\mathbf{(2a^3b^2) . (3ab^4)^3} = 2 . a^3 . b^2 . 3^3 . a^3 . b^{4 \cdot 3}$ propiedad distributiva
$= 2 . a^3 . b^2 . 27 . a^3 . b^{12}$ resolvemos la potencia
$= 2 . 27 . a^3 . a^3 . b^2 . b^{12}$ agrupamos los factores con la misma base
$\mathbf{= 54 . a^6 . b^{14}}$ aplicamos propiedades

RADICACIÓN

Raíz enésima: Si $a \in R$ y $n \in N$, se define $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ — *a: radicando*, *n: índice*

Para n par y $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ y $b \geq 0$
Para n impar $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

PROPIEDADES:

Si $a, b \in R^+$ y n, m y $p \in N$, $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, $b \neq 0$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$;

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ para n par ; $\sqrt[n]{a^n} = a$ para n impar

Propiedad fundamental: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$ o $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$ (*)

Potencia de base real y exponente racional: Si m y n $\in Z^+$, se define: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplos:

- $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$
- $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES CON RAÍCES

- $\sqrt[3]{\mathbf{x^4}} = \sqrt[3]{x^3 . x}$ factorizamos la base de manera que el exponente sea múltiplo del índice
  $= \sqrt[3]{x^3} . \sqrt[3]{x}$ aplicamos propiedad distributiva
  $= \mathbf{x} . \sqrt[3]{\mathbf{x}}$ simplificamos

- $\sqrt[4]{\mathbf{81x^8y^4}} = \sqrt[4]{81} . \sqrt[4]{x^8} . \sqrt[4]{y^4}$ aplicamos la propiedad distributiva
  $= 3 . \sqrt[4]{(x^2)^4} . |y|$ aplicamos la propiedad fundamental y simplificamos
  $= \mathbf{3 . x^2 . |y|}$

SIMPLIFICACIÓN AL ESCRIBIR RADICALES COMO EXPONENTES RACIONALES

Ejemplo:

- $\mathbf{2\sqrt{x} . 3\sqrt[3]{x}} = 2 . x^{\frac{1}{2}} . 3 . x^{\frac{1}{3}}$ expresamos como potencias
  $= 6 . x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ aplicamos propiedad de potencias de igual base
  $= \mathbf{6 . x^{\frac{5}{6}}}$

OPERACIONES CON RADICALES

SUMA DE RADICALES SEMEJANTES

Ejemplos:

- $\mathbf{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}} = (2+5)\sqrt{3} = \mathbf{7\sqrt{3}}$ Aplicamos propiedad distributiva
- $\mathbf{\sqrt{32} + \sqrt{200}} = \sqrt{16 . 2} + \sqrt{100 . 2}$ Factorizamos los radicandos
  $= \sqrt{16} . \sqrt{2} + \sqrt{100} . \sqrt{2}$ aplicamos la propiedad distributiva
  $= 4 . \sqrt{2} + 10 . \sqrt{2}$ resolvemos las raíces
  $= \mathbf{14 . \sqrt{2}}$ sumamos términos semejantes
- Si b> 0, $\mathbf{\sqrt{25b} - \sqrt{b^3}} = \sqrt{25} . \sqrt{b} - \sqrt{b^2} . \sqrt{b}$ Aplicamos propiedad distributiva
  $= 5 . \sqrt{b} - b . \sqrt{b}$ resolvemos raíces y simplificamos
  $= \mathbf{(5-b) . \sqrt{b}}$ sumamos términos semejantes

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar radicales es necesario que tengan el mismo índice.

Ejemplo:

- $\mathbf{\sqrt{2} . \sqrt{8}} = \sqrt{2 . 8} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$ Aplicamos propiedad distributiva

Si los radicales tienen distinto índice, primero debemos expresarlos con el mismo índice. El índice de los nuevos radicales debe ser el mínimo común múltiplo entre los índices originales.
Aplicamos la propiedad fundamental (*)

Ejemplo:

- $\mathbf{\sqrt[3]{4} . \sqrt[6]{3}} = \sqrt[3 . 2]{4^{1 . 2}} . \sqrt[6]{3}$ llevamos a índice 6 el primer radical, multiplicamos por 2 el índice y el exponente
  $= \sqrt[6]{16 . 3}$
  $= \mathbf{\sqrt[6]{48}}$ aplicamos distributiva y resolvemos

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Racionalizar consiste en obtener una fracción equivalente a una dada, pero que no tenga raíces en el denominador.
Según la expresión que aparece en el denominador el proceso es diferente.

- Si el denominador contiene **sólo un término** formado por una raíz cuadrada, basta con multiplicar numerador y denominador por esa raíz:

Ejemplo:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{2}$ y operamos

- Si el denominador de la fracción contiene **dos términos** en uno de los cuales o en los dos hay una raíz cuadrada, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. Es decir, si es una suma se multiplica por la resta, y viceversa.

Ejemplo:

- $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2.(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}+1)} = \frac{2.(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{\cancel{2}.(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}} = \sqrt{3}+1$

  - multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{3}+1$
  - tenemos una diferencia de cuadrados en el denominador: $(a + b) . (a – b) = a^2 – b^2$
  - simplificamos y operamos

PORCENTAJE

Ejemplo: *Calcula el 40% de 60.*

Las siguientes expresiones son equivalentes: 40% ; 40 de cada 100 ; 40 : 100 ; 0,4

Entonces el **40% de 60** = 0,4 . 60 = **24**

VARIACIÓN PORCENTUAL

Ejemplo: Un producto cuesta inicialmente \$180. Su precio sube un 15%. ¿Cuál es el nuevo precio?

$$\$180 + 15\% \cdot \$180 = \$180 + \frac{15}{100} \cdot \$180 = \$180 + 0{,}15.\$180 = (1+0{,}15) \cdot \$180 = 1{,}15 \cdot \$180 = \$207$$

El nuevo precio es de \$207.

En general, cuando una magnitud aumenta o disminuye en un tanto por ciento, la relación entre el valor inicial y el nuevo es:

Nuevo valor = coeficiente de variación x valor inicial

Coeficiente de variación = $1 \pm \frac{\text{tanto por ciento}}{100}$

Signo +: aumento *Signo -: disminución*

LOGARITMOS

La ***logaritmación*** es una operación por la cual se calcula el exponente al que se tiene que elevar un número ***a*** positivo y distinto de 1 para obtener otro número ***b***.

Esto se escribe $\boldsymbol{\log_a b}$, se lee logaritmo en base ***a*** de **b**.

a recibe el nombre de ***base*** y **b** es el ***argumento***

Se define como: $\boldsymbol{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$, ***donde*** $\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1}$ ***y***, $\boldsymbol{b > 0}$

EJEMPLOS:

a) $\log_2 16 = 4$, porque $2^4 = 16$

b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$

Existen dos logaritmos cuya notación es especial:

- el decimal (base 10), que se simboliza $\log_{10} b = \log b$;
- el natural o neperiano (base $e \cong 2{,}71$), que se simboliza $\log_e b = \ln b$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

- $\boldsymbol{\log_a 1 = 0}$, el logaritmo de cualquier base de 1 es igual a cero. *Con* $a \in R^+ - \{1\}$
  Ejemplo: $\log_5 1 = 0$ pues $5^0 = 1$

- $\boldsymbol{\log_a a = 1}$, el logaritmo en base *a* de la base es siempre igual a 1. *Con* $a \in R^+ - \{1\}$
  Ejemplo: $\log_3 3 = 1$ pues $3^1 = 3$

- $\boldsymbol{\log_a (b.\ c) = \log_a b + \log_a c}$, el logaritmo del producto es igual a la suma de los logaritmos
- Ejemplo: $\log_2 (4\ .\ 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ *Con* b *y* $c \in R^+$
  $\log_2 32 = 2 + 3$
  $5 = 5$

- $\boldsymbol{\log_a (b: c) = \log_a b - \log_a c}$, con $\log_a c \neq 0$, el logaritmo del cociente es igual a la diferencia de los logaritmos *Con* b *y* $c \in R^+$
  Ejemplo: $\log_3 (27 : 3) = \log_3 27 - \log_3 3$
  $\mathrm{Log}_3\, 9 = 3 - 1$
  $2 = 2$

- $\boldsymbol{\log_a b^n = n \log_a b}$, el logaritmo de la enésima potencia de un número es igual a n veces el logaritmo del número. *Con* $b \in R^+$
  Ejemplo: $\log_2 2^3 = 3\ .\ \log_2 2 = 3\ .\ 1 = 3$

- $\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}$, Ejemplo: $5^{\log_5 2} = 2$

EJEMPLO: Calcula aplicando propiedades.

a) $\log_3 3^2 = \mathbf{2}\ .\ \log_3 3 = 2\ .\ 1 = 2$

b) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = \mathbf{3}\ .\ \log_5 5 = 3\ .\ 1 = 3$

c) $\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4}\ .\ 3 = \frac{3}{4}$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es una secuencia de operaciones entre números y letras. Las letras se denominan variables.

$7x^3$; $3x^2 - 5x + 6$; $(2x + 3)(4y - 5)$; $\frac{2ab^2-3}{4ab}$

Las letras representan números, no determinados por el momento. Las operaciones con letras, y sus propiedades, son las mismas que con números.

IDENTIDADES NOTABLES

Las siguientes expresiones son útiles para simplificar los cálculos y se escriben directamente los resultados de estas operaciones.

CUADRADO DE UN BINOMIO: $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2}$

CUBO DE UN BINOMIO: $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3}$

SUMA POR DIFERENCIA es igual a **DIFERENCIA DE CUADRADOS** $\boxed{(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2}$

Ejemplos:

- $(x + 2)^2 = x^2 + 2 . x . 2 + 2^2 = \boldsymbol{x^2 + 4x + 4}$
- $(2x - 1)^2 = [2x + (-1)]^2 = (2x)^2 + 2 . 2x . (-1) + (-1)^2 = \boldsymbol{4x^2 - 4x + 1}$
- $(x - 2)^3 = [x + (-2)]^3 = x^3 + 3 . x^2 . (-2) + 3 . x . (-2)^2 + (-2)^3 = \boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$
- $(x + 3) . (x - 3) = x^2 - 3^2 = \boldsymbol{x^2 - 9}$

TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS A LENGUAJE ALGEBRAICO

Mediante el uso de expresiones algebraicas podemos escribir en forma abreviada relaciones entre cantidades, lo que nos permite traducir enunciados desde el lenguaje coloquial al lenguaje algebraico.

Algunos ejemplos:

El doble de x .... $2x$
El doble de x más 3... $2x + 3$
El triple de x .... $3x$
La cuarta parte de x .... $\frac{1}{4}x$
El 80% de x .... $\frac{80}{100}x = 0,8\,x$
Perímetro de un cuadrado de lado 2x .... $4 . 2x = 8x$
Longitud 8 unidades menor que x .... $x - 8$

Otro ejemplo:
El precio del café es de x \$/kg, y el del azúcar, y \$/kg.

- Costo de tres kg de café y de dos kg y medio de azúcar: $3x + 2,5y$
- Costo de 2 kg de café si nos hacen un 30% de descuento: $2x - 0,3 . 2x = 2x - 0,6x = 1,4x$

ECUACIONES

Una **identidad** es una igualdad que se verifica para cualquier valor de la/s variable/s

$h + h = 2h$ $\quad$ $m + n = n + m$ $\quad$ $cn + dn = (c + d) . n$

Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para uno, algunos o ningún valor de la/s variable/s

$x + 3 = 0$ $\quad$ $8 - 2x = 0$ $\quad$ $x + 5 = x - 2$ $\quad$ $a + 2b + c = 0$

Resolver una ecuación es encontrar, si existen, el o los valores de las variables que verifican la igualdad planteada. Dichos valores determinan el conjunto solución de la ecuación.

ECUACIONES LINEALES: $a . x = b$, siendo $a , b \in R$

- Si $a \neq 0$, la ecuación es compatible determinada (única solución)
- Si $a = 0$ y $b = 0$, la ecuación es compatible indeterminada (infinitas soluciones)
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación es incompatible (no existe solución)

Ejemplos de resolución:

- $7x - 6 = 5x + 3$
  $7x - 5x = 3 + 6$
  $2x = 9$
  $x = 9 : 2$
  $x = 4,5$
  $S = \{ 4,5 \}$
- $2x + 3 = 2 (x + 5) - 7$
  $2x + 3 = 2x + 10 - 7$
  $2x - 2x = 10 - 7 - 3$
  $0 = 0$ Identidad
  Tiene infinitas soluciones
- $x - 3 = 2 + x$
  $x - x = 2 + 3$
  $0 = 5$!! absurdo
  No tiene solución
  $S = \{ \}$

APLICACIONES

Los métodos algebraicos a menudo son útiles en la solución de problemas aplicados en diversos campos. El siguiente procedimiento por etapas con frecuencia es útil en la aplicación de este proceso.

Paso 1 Representar la cantidad desconocida (es decir, la cantidad que debe determinarse) mediante una letra, tal como *x*.
Paso 2 Expresar todas las demás cantidades, si las hay, en términos de *x*.
Paso 3 Traducir las expresiones verbales que aparezcan en el problema en expresiones algebraicas en las cuales intervenga *x*.
En este contexto, palabras tales como *es* o *era* se traducen al símbolo algebraico **=**.
Paso 4 Resolver la expresión o expresiones algebraicas de acuerdo con los métodos algebraicos.
Paso 5 Transformar la solución algebraica en forma verbal.

EJEMPLO: *Determina dos números enteros consecutivos cuya suma sea 19.*

Paso 1 Dado que debemos encontrar dos números enteros, debemos decidir a cuál de ellos llamar *x*.
Denotemos con ***x*** al entero más pequeño.
Paso 2 Luego, el segundo entero es $\boldsymbol{x+1}$, pues son consecutivos.
Paso 3 La expresión *suma de dos enteros* se puede expresar como $x + (x + 1)$
La afirmación de que esta suma es 19, equivale a la ecuación $x + (x + 1) = 19$
Paso 4 Operamos y despejamos *x*.

$$x + (x + 1) = 19$$
$$2x + 1 = 19$$
$$2x = 19 - 1$$
$$x = 18 : 2$$
$$\boldsymbol{x = 9} \quad \text{entonces} \quad \boldsymbol{x + 1 =} 9 + 1 = \boldsymbol{10}$$

Paso 5 Por lo tanto **los números enteros son 9 y 10.**

ECUACIONES CUADRÁTICAS: $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$

Se resuelve aplicando la fórmula: $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante)

Analizando el valor de Δ obtenemos que:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene solución real.

Para resolver una ecuación cuadrática, podemos usar la fórmula de la siguiente manera.

En primer lugar, reducimos la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (igualamos a 0).

Luego, identificamos *a, b* y *c*, los tres coeficientes de la expresión, y sustituimos estos coeficientes en la fórmula.

EJEMPLO: Resolver la ecuación $-2x^2 + 6x - 4 = 0$

Solución: La ecuación está igualada a cero. Los coeficientes son: $a = -2$, $b = 6$ y $c = -4$.
Aplicando la fórmula y reemplazando queda:

$$x_1, x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.(-2).(-4)}}{2.(-2)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-4} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-4} = \frac{-6 \pm 2}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-6+2}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \qquad \text{o} \qquad x_2 = \frac{-6-2}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

La solución de la ecuación es **S = { 1 ; 2 }**

APLICACIONES

EJEMPLO: Juan es 7 años mayor que Luis. Si el producto de sus edades es 60, ¿cuál es la edad de Luis?

Solución: Llamemos x a la edad de Luis. Entonces Juan tiene: $x+7$ años.
Si el producto (Edad de Luis) . (Edad de Juan) = 60,
reemplazando obtenemos $x \,.\, (x + 7) = 60$
Esto es, $x^2 + 7x - 60 = 0$

Aplicamos la fórmula: $a = 1$, $b = 7$ y $c = -60$

$$x_1, x_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1.(-60)}}{2.1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+240}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7+17}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad \text{o} \qquad x_2 = \frac{-7-17}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

$x_1 = 5$ y $x_2 = -12$

Como x (es una edad) no puede ser negativa, **la edad de Luis es 5.**

INTERVALOS REALES

Se denomina intervalo real a toda semirrecta o segmento de la recta real.
Algebraicamente se designa un intervalo por sus extremos encerrados entre paréntesis o corchetes:

- Paréntesis, si los extremos no están incluidos (intervalo abierto)
- Corchetes, si se incluyen los extremos (intervalo cerrado)

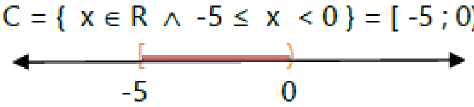
Ejemplos:

$A = \{ x \in R \wedge -3 \leq x \leq 1 \} = [-3 ; 1]$

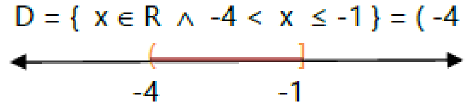
-3 1

$B = \{ x \in R \wedge 4 < x < 7 \} = (4 ; 7)$

$C = \{ x \in R \wedge -5 \leq x < 0 \} = [-5 ; 0)$

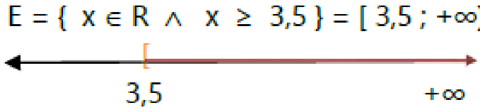


$D = \{ x \in R \wedge -4 < x \leq -1 \} = (-4 ; -1]$

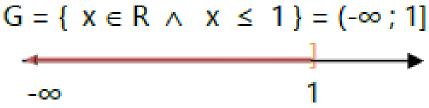


INTERVALOS INFINITOS

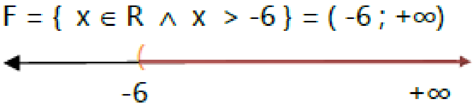
$E = \{ x \in R \wedge x \geq 3,5 \} = [3,5 ; +\infty)$



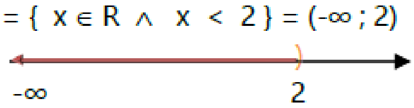
$G = \{ x \in R \wedge x \leq 1 \} = (-\infty ; 1]$



$F = \{ x \in R \wedge x > -6 \} = (-6 ; +\infty)$



$H = \{ x \in R \wedge x < 2 \} = (-\infty ; 2)$



DESIGUALDADES

Propiedades de las desigualdades:

Sean a, b, c y d $\in$ R;

- Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ — Propiedad transitiva
- Si $a < b \Rightarrow a + \mathbf{c} < b + \mathbf{c}$ — Sumar un número a cada miembro de la desigualdad da una desigualdad equivalente.
- Si $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot \mathbf{c} < b \cdot \mathbf{c}$ — Multiplicar un número positivo a cada miembro de la desigualdad da una desigualdad equivalente.
- Si $a < b \wedge \mathbf{c < 0} \Rightarrow a \cdot \mathbf{c} > b \cdot \mathbf{c}$ — Multiplicar un número **negativo** a cada miembro de la desigualdad invierte la dirección de la desigualdad.
- Si $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$ — Las desigualdades se pueden sumar.

INECUACIONES

Las desigualdades que contienen variables se llaman **Inecuaciones**.

Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que la verifican, y el conjunto solución es un intervalo real o el conjunto vacío.
Una inecuación se resuelve como una ecuación, salvo en el caso en que se divida o se multiplique por un número negativo se debe invertir el sentido de la desigualdad.

Ejemplos de resolución de inecuaciones lineales:

- $2x - 5 < 11$
  $2x < 11 + 5$
  $2x < 16$
  $x < 16 : 2$
  $x < 8$
  S = (-∞ ; 8)

- $-9 - 4x \leq 11$
  $-4x \leq 11 + 9$
  $-4x \leq 20$
  $x \geq 20 : (-4)$
  $x \geq -5$
  S = [-5 ; +∞)

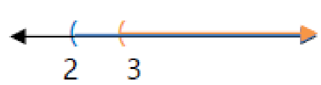
- $-1 < 2x + 3 \leq 7$
  $-1 - 3 < 2x + 3 - 3 \leq 7 - 3$
  $-4 < 2x \leq 4$
  $-4 : 2 < 2x : 2 \leq 4 : 2$
  $-2 < x \leq 2$
  S = (-2 ; 2]

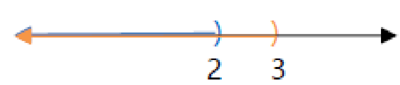
Ejemplos de resolución de inecuaciones cuadráticas:

- $\mathbf{x^2 > 5x - 6}$
  $x^2 - 5x + 6 > 0$ - Pasamos todos los términos para un mismo miembro
  $\underbrace{(x - 2)}_{\mathbf{a}} \cdot \underbrace{(x - 3)}_{\mathbf{b}} > 0$ - Calculamos las raíces de la expresión cuadrática que son 2 y 3 y, escribimos la expresión en la forma factorizada.
  a . b > 0 - Nos queda un producto mayor que 0 (*positivo*), es decir que las dos expresiones deberán ser mayores que 0 (*positivas*) o menores que 0 (*negativas*)
  $\mathbf{a > 0 \ \wedge \ b > 0 \quad \vee \quad a < 0 \ \wedge \ b < 0}$

En este caso quedaría: $x - 2 > 0 \ \wedge \ x - 3 > 0 \quad \vee \quad x - 2 < 0 \ \wedge \ x - 3 < 0$

Despejamos: $x > 2 \ \wedge \ x > 3 \quad \vee \quad x < 2 \ \wedge \ x < 3$

Representamos: 

o 

Escribimos los intervalos que cumplen las condiciones de cada parte: (3 ; +∞) o (-∞ ; 2)

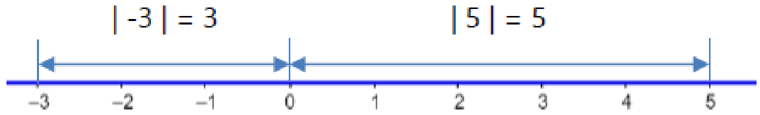
La solución sería: **S = (-∞ ; 2) U (3 ; +∞)**

VALOR ABSOLUTO Y DISTANCIA

El valor absoluto de un número *x*, es la distancia de *x* al 0 en la recta de números reales.

Notación: $|x|$; *se lee*: valor absoluto de x *o* módulo de x

Ejemplos: $|-3| = 3$ $|5| = 5$



La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|x| \geq 0$ para todo número x. Recordando que *-x* es positivo cuando *x* es negativo, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si $x \in IR$, su valor absoluto es: $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Ejemplos:

$|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$, $|3 - \pi| = \pi - 3$ (porque $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si x_1 y x_2 son números reales, entonces la distancia entre los puntos x_1 y x_2 sobre la recta real es

$$\mathbf{d(x_1 ; x_2) = |x_1 - x_2|}$$

PROPIEDADES

Si $x \in R$; $y \in R$ y $n \in Z$, se verifica:

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$
- $|x| = \sqrt[2]{x^2}$ o $|x|^2 = x^2$
- $|x^n| = |x|^n$
- $|x - y| = |y - x|$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Ejemplo: *Halla la solución de* $|2x - 5| = 3$

Aplicamos la definición de valor absoluto: si $|k| = a$ entonces $k = a \vee k = -a$

Si $|2x - 5| = 3$ es equivalente a $2x - 5 = 3 \quad \vee \quad 2x - 5 = -3$

Despejamos x en cada ecuación: $2x = 3 + 5 \quad \vee \quad 2x = -3 + 5$

$2x = 8 \quad \vee \quad 2x = 2$

$\mathbf{x = 4} \quad \vee \quad \mathbf{x = 1}$

Solución: $\mathbf{S = \{ 1 ; 4\}}$

DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO ($x, c \in R, c > 0$)

Desigualdad | **Forma equivalente** | **Gráfica**

- $|x| < c$ $\quad -c < x < c$

- $|x| \le c$ $\quad -c \le x \le c$

- $|x| > c$ $\quad x < -c$ o $x > c$

- $|x| \ge c$ $\quad x \le -c$ o $x \ge c$

PROPIEDAD: $|x + y| \le |x| + |y|$ desigualdad triangular

Ejemplos de resolución de inecuaciones con valor absoluto:

- *Hallá la solución de* $|x - 5| < 2$

La desigualdad $|x - 5| < 2$ es equivalente a $\quad -2 < x - 5 < 2$

Despejamos x, sumamos 5 a los tres miembros $\quad -2 + 5 < x - 5 + 5 < 2 + 5$

Operamos en cada miembro $\quad 3 < x < 7$

La solución es: $\quad$ **S = (3 ; 7)**

- *Halla la solución de* $|3x + 2| \ge 4$

La desigualdad $|3x + 2| \ge 4$ es equivalente a $\quad 3x + 2 \le -4 \quad \vee \quad 3x + 2 \ge 4$

Despejamos x en cada inecuación: $\quad 3x \le -4 - 2 \qquad 3x \ge 4 - 2$

$3x \le -6 \qquad 3x \ge 2$

$x \le \frac{-6}{3} \qquad x \ge \frac{2}{3}$

$x \le -2 \qquad x \ge \frac{2}{3}$

La solución es: $\quad$ **S =** $(-\infty ; -2] \cup [\frac{2}{3} ; +\infty)$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones. En este caso trabajaremos con dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

EJEMPLO: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$ Es un sistema de dos ecuaciones y las incógnitas son x e y.

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

Cuando un sistema admite solución se dice que es **COMPATIBLE**

Si esa solución es única entonces el sistema resulta **COMPATIBLE DETERMINADO** mientras que si las soluciones son infinitas entonces se clasifica como **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Por último, cuando un sistema no admite solución se dice que es **INCOMPATIBLE**.

SCD : una solución

SCI: infinitas soluciones

SI: no tiene solución

MÉTODO DE IGUALACIÓN

EJEMPLO: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x - 2y = 18 \end{cases}$

- Despejamos la misma incógnita de ambas ecuaciones (en este caso elegimos la y).

$$3x + y = 1$$
$$y = 1 - 3x \quad (I)$$

$$4x - 2y = 18$$
$$y = (18 - 4x) : (-2) \quad (II)$$

- Igualamos (I) y (II).

$$1 - 3x = (18 - 4x) : (-2)$$

- Resolvemos la ecuación que obtuvimos y averiguamos ***x***.

$$(1 - 3x) . (-2) = 18 - 4x$$
$$-2 + 6x = 18 - 4x$$
$$6x + 4x = 18 + 2$$
$$10x = 20$$
$$\boldsymbol{x = 2}$$

- Reemplazamos en (I) o en (II) para averiguar ***y***.

$$y = 1 - 3 . 2$$
$$\boldsymbol{y = -5}$$

- La solución es **x = 2** e **y = -5**

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

EJEMPLO: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$

- Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

$$2x + y = 5$$
$$y = 5 - 2x \quad \text{(I)}$$

- Sustituimos la expresión (I) en la otra ecuación del sistema. Resolvemos la nueva ecuación y averiguamos **x** que obtuvimos, y averiguamos **y**.

$$3x - 2y = -3$$
$$3x - 2\,\mathbf{(5 - 2x)} = -3$$
$$3x - 10 + 4x = -3$$
$$7x = 7$$
$$\boldsymbol{x = 1}$$

- Reemplazamos en (I) el valor de x

$$y = 5 - 2 \cdot \mathbf{1}$$
$$y = 5 - 2$$
$$\boldsymbol{y = 3}$$

- La solución es **x = 1** e **y = 3**

MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMAS Y/O RESTAS

(se desarrollará en los encuentros presenciales con los docentes tutores)

POLINOMIOS - GENERALIDADES

Un polinomio ***reducido*** es el que no tiene más de un término con el mismo grado. Cuando hagamos referencia a un polinomio, será siempre al reducido.

EJEMPLO: $P(x) = -3x^2 - 4x + 7 + 7x^2 - x + 4 = \mathbf{4x^2 - 5x + 11}$ $\rightarrow$ **es el polinomio reducido**

Sumamos los términos semejantes y obtenemos el polinomio reducido.

En un polinomio reducido:

- El ***grado*** lo determina el término de mayor grado.
- El ***coeficiente principal*** es el coeficiente del término de mayor grado.
- El ***término independiente*** es el término de grado 0.
- Según la cantidad de términos, se denomina ***monomio*** si tiene uno solo; ***binomio***, si tiene dos; ***trinomio***, si tiene tres; y ***cuatrinomio***, si tiene cuatro. Los demás se nombran como polinomios de 5, 6 o 7 términos, respectivamente.

EJEMPLO: $P(x) = 4x^2 - 5x + 11$**,** es un ***trinomio*** de grado ***2,*** cuyo coeficiente principal es ***4*** y su término independiente, ***11***.

Un polinomio está:

- ***Normalizado***, si su coeficiente principal es 1.
- ***Ordenado***, si sus términos están ordenados de manera creciente o decreciente respecto al valor de los exponentes de la variable.
- ***Completo***, si tiene todas las potencias decrecientes del grado y, si está incompleto, se agregan los términos con las potencias que faltan con coeficiente 0.

EJEMPLO: Sea $M(x) = -2x^3 - 3 + x + 3x^5$

$M(x) = 3x^5 - 2x^3 + x - 3$, está ordenado

$M(x) = 3x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 0x^2 + x - 3$, está completo y ordenado

- El ***valor numérico*** de un polinomio es el resultado de reemplazar x por un número real.

EJEMPLO: para $x = 2$ en $P(x) = 3x^2 - 6x - 3$, el valor numérico es $P(\mathbf{2}) = 3 \cdot \mathbf{2}^2 - 6 \cdot \mathbf{2} - 3 = \boldsymbol{-3}$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA Y RESTA

Para sumar o restar polinomios, se suman o restan sus términos semejantes.

EJEMPLO: Dados $P(x) = 4x^3 - x^2 - 2x + 1$ y $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 5$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$.

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x)} = (4x^3 - x^2 - 2x + 1) + (2x^3 + 3x^2 + 2x - 5) = \boldsymbol{6x^3 + 2x^2 - 4}$$

$$\boldsymbol{P(x) - Q(x)} = (4x^3 - x^2 - 2x + 1) - (2x^3 + 3x^2 + 2x - 5) = \boldsymbol{2x^3 - 4x^2 - 4x + 6}$$

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar dos polinomios aplicamos la propiedad distributiva.

EJEMPLO: Dados $P(x) = x^2 - 4x + 3$ y $Q(x) = 5x^2 - x$, halla $P(x) . Q(x)$

$\boldsymbol{P(x) . Q(x)} = (x^2 - 4x + 3) . (5x^2 - x) = 5x^4 - x^3 - 20x^3 + 4x^2 + 15x^2 - 3x = \boldsymbol{5x^4 - 21x^3 + 19x^2 - 3x}$

POTENCIA DE POLINOMIOS

- Para resolver la **potencia de un monomio**, aplicamos la propiedad distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación y la potencia de otra potencia.

EJEMPLOS: $\boldsymbol{(4x)^3} = 4^3 . x^3 = \boldsymbol{64x^3}$

$\boldsymbol{(-2x^3)^2} = (-2)^2 . (x^3)^2 = \boldsymbol{4x^6}$

Cuadrado de un binomio

Al resolver el cuadrado de un binomio, obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

EJEMPLO: $\boldsymbol{(x^2 - 3)^2} = (x^2)^2 + 2 . x^2 . (-3) + (-3)^2 = \boldsymbol{x^4 - 6x^2 + 9}$

Cubo de un binomio

Al resolver el cubo de un binomio, obtenemos un cuatrinomio cubo perfecto.

EJEMPLO: $\boldsymbol{(2x + 5)^3} = (2x)^3 + 3 . (2x)^2 . 5 + 3 . 2x . 5^2 + 5^3 = \boldsymbol{8x^3 + 60x^2 + 150x + 125}$

DIVISIÓN POLINOMIOS

Dividir dos polinomios P(x) y Q(x), (grado de P(x) ≥ grado de Q(x)), es encontrar dos polinomios C(x) y R(x) (con R(x) de grado menor a Q(x) o nulo) tales que verifican la siguiente identidad:

$$P(x) = C(x) . Q(x) + R(x)$$

Un esquema familiar es:

$$\begin{array}{lcl|lcl} \text{dividendo} & \longleftarrow & P(x) & Q(x) & \longrightarrow & \text{divisor} \\ \cline{4-4} \text{resto} & \longleftarrow & R(x) & C(x) & \longrightarrow & \text{cociente} \end{array}$$

Para obtener los polinomios cociente C(x) y resto R(x) realizamos los siguientes pasos.

1. Colocamos el polinomio dividendo completo y ordenado en forma decreciente y el polinomio divisor ordenado de la misma forma.

2. Para calcular el primer término del cociente, dividimos el monomio de mayor grado del dividendo por el monomio de mayor grado del divisor.

3. El monomio obtenido en 2, lo multiplicamos por el divisor, lo colocamos bajo el dividendo y restamos, obteniendo el primer resto. A partir de aquí repetimos los pasos 2 y 3, hasta que el polinomio resto tenga grado menor que el del polinomio divisor o se obtenga el polinomio nulo.

EJEMPLO: Dividamos $P(x) = 3x^4 - 2x + 5x^3 + 3$ por $Q(x) = x^2 - 3x + 2$

Usamos el esquema anterior:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 2x + 3 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{3-3}
- & 3x^4 - 9x^3 + 6x^2 & \underbrace{3x^2 + 14x + 36}_{C(x)\ \to\ \text{cociente}} \\ \cline{2-2}
/ & 14x^3 - 6x^2 - 2x + 3 & \\
- & 14x^3 - 42x^2 + 28x & \\ \cline{2-2}
/ & 36x^2 - 30x + 3 & \\
- & 36x^2 - 108x + 72 & \\ \cline{2-2}
/ & \underbrace{78x - 69}_{R(x)\ \to\ \text{resto}} &
\end{array}
$$

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO DE GRADO MAYOR O IGUAL A 1 POR OTRO DE PRIMER GRADO

- Si El divisor es de la forma **x + a**, un método práctico que podemos aplicar para calcular el cociente y el resto de la división es la **regla de Ruffini.**

EJEMPLO: Halla el cociente y el resto al dividir $(3x - 2x^3 - 4)$ por $(x + 2)$

El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado $\longrightarrow$ $-2x^3 + 0x^2 + 3x - 4$

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo $\longrightarrow$

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & -2 & 0 & 3 & -4 \\
-2 & & 4 & -8 & 10 \\ \hline
 & -2 & 4 & -5 & 6
\end{array}
$$

El coeficiente principal se ¨baja¨ sin modificarlo; luego, se lo multiplica por la raíz del divisor (en este caso -2) y se suma con el segundo coeficiente; y así sucesivamente, hasta llegar al resto. Los números obtenidos son los coeficientes del cociente.

El cociente es un grado menor que el dividendo $\longrightarrow$ $C(x) = -2x^2 + 4x - 5$ (cociente) $\quad 6$ (resto)

TEOREMA DEL RESTO

El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma **x + a** es el valor numérico del polinomio para **x = -a** (la raíz del polinomio divisor)

EJEMPLO: Vamos a calcular el resto de la división del ejemplo anterior aplicando el teorema del resto.

Debemos hallar el valor numérico del dividendo para que $x = -2$.

Llamemos $P(x)$ al dividendo, $P(x) = 3x - 2x^3 - 4$ y hallamos $P(-2)$,

$\mathbf{P(-2)} = 3 \cdot \mathbf{(-2)} - 2 \cdot \mathbf{(-2)^3} - 4 = -6 + 16 - 4 = \mathbf{6}$, es decir el resto es 6 y coincide con el valor hallado al aplicar la regla de Ruffini.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

La **raíz** o **cero** de un polinomio es el valor de x para el cual el valor numérico del polinomio es **0.**

- a es raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ P(a) = 0
- a es raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ P(x) es divisible por (x – a)

Un polinomio puede tener tantas raíces como lo indique su grado.

El orden de ***multiplicidad*** de una raíz es la cantidad de veces que la raíz se repite como tal.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio es expresarlo como ***producto*** de dos o más polinomios ***primos***.

Veamos algunas herramientas que nos facilitarán dicha factorización.

FACTOR COMÚN

Para extraer el factor común, aplicamos la propiedad distributiva de manera inversa.

a . b + a . c = a . (b + c) , el factor **a** se repite en ambos términos

Primero, debemos reconocer cual es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el dcm (divisor común mayor) de todos los coeficientes del mismo.

EJEMPLO: Factoriza el polinomio $P(x) = 6x^2 - 3x$, extrayendo el factor común

Calculamos el factor común:

- El dcm de los coeficientes es 3, dcm (6, -3) = **3**
- La variable con menor exponente es **x**
- El factor común es **3x**

Dividimos cada término del polinomio por el factor común.

$6x^2 : \mathbf{3x} = 2x, \qquad 3x : \mathbf{3x} = 1$

Finalmente expresamos el polinomio como producto del factor común por los cocientes obtenidos

$P(x) = 6x^2 - 3x = \mathbf{3x \,.\, (2x - 1)}$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

La diferencia de dos números elevados al cuadrado es igual al producto entre la suma y la diferencia de sus bases.

$$\underbrace{\mathbf{a^2 - b^2}}_{\text{diferencia de cuadrados}} \quad = \quad \underbrace{\mathbf{(a + b) \,.\, (b - a)}}_{\text{suma por diferencia}}$$

Se aplica cuando el polinomio tiene:

- dos términos de distinto signo.
- ambos términos deben ser cuadrados, es decir, se les puede calcular la raíz cuadrada.

Cumplidas las condiciones anteriores, factorizamos el polinomio multiplicando la suma de las raíces por la resta de las misma.

EJEMPLOS:

1) $P(x) = 4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x + 1) \,.\, (2x - 1)$
2) $P(x) = x^4 - 64 = (x^2)^2 - 8^2 = (x + 8) \,.\, (x^2 - 8)$
3) $P(x) = x^6 - 16 = (x^3)^2 - 4^2 = (x^3 + 4) \,.\, (x^3 - 4)$

SUGERENCIAS PARA LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS:

- Si el **grado es 2**, aplico **resolvente** [encontramos las raíces, si es que tiene, y escribimos la forma factorizada: $\mathbf{P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$]
- Si el grado es **mayor que 2**.
  - ✓ Intentamos sacar factor común **(f.c.).**
    - Si tiene **dos términos y grado par**, vemos si es una diferencia de cuadrados **(d.c.),** si no es busco una **raíz** aplicando el Teorema de **Gauss** y aplico la regla de **Ruffini**.

    (Al aplicar Ruffini bajo un grado al polinomio original y quedan polinomios más sencillos para factorizar), este procedimiento puedo aplicarlo hasta obtener un polinomio de grado 2.

Observación: en los ejemplos propuestos en la práctica no incluimos el uso del Teorema de Gauss

EJEMPLOS: Factorizar los siguientes polinomios.

1) $\mathbf{P(x) = 3x^3 + 18x^2 + 27x}$ - El polinomio es de grado 3, y podemos sacar **factor común**, en este caso es **3x**

$P(x) = 3x\,(x^2 + 6x + 9)$

- Queda un polinomio de grado 2 y podemos aplicar la resolvente,

$x_1, x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$ tiene una raíz **doble** y escribiendo la forma factorizada quedaría $(x+3)^2$

$P(x) = 3x\,(x + 3)^2$

$\mathbf{P(x) = 3x\,(x + 3)^2}$ ← **Es la factorización del polinomio**

2)

$P(x) = 2x^6 - 32x^2$ - Sacamos factor común, el f.c. es $2x^2$

$P(x) = 2x^2 (x^4 - 16)$ - queda un polinomio de grado 2, es una diferencia de cuadrados, la desarrollamos.

$P(x) = 2x^2 (x^2+ 4) (x^2 - 4)$ - queda otra diferencia de cuadrados y la desarrollamos

$P(x) = 2x^2 (x^2+ 4) (x+2)(x - 2)$

$P(x) = 2x^2 (x^2+ 4) (x+2)(x - 2)$ ← **Es la factorización del polinomio**

ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR A DOS

Para resolver ecuaciones del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b$, se debe igualar a cero, factorizar y aplicar la propiedad de nulidad del producto: $m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0$ ó $n = 0$

EJEMPLO: Halla los valores de x que verifican la ecuación $3x^3 - 12x + x^2 = 4$

- Igualamos a 0: $3x^3 - 12x + x^2 - 4 = 0$
- factorizamos: $(x + 2) (x - 2) (3x + 1) = 0$
- Identificamos las raíces: $-2 \quad 2 \quad -\frac{1}{3}$
- Los valores que verifican la ecuación son: $x = -2$, $x = 2$ y $x = -\frac{1}{3}$
- **$S = \{ -2, -\frac{1}{3}, 2\}$** es la solución de la ecuación.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Una ***expresión algebraica racional*** **(EAR)** es toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son polinomios reales y $Q(x) \neq 0$.

EJEMPLOS: $\frac{2}{x-1}$; $\frac{x}{x^2+1}$ y $\frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$ son expresiones algebraicas racionales.

- Una **EAR** es ***irreducible*** cuando no tiene factores comunes ni en su numerador ni en su denominador.
- Simplificar una **EAR** es hallar su expresión equivalente irreducible, que permite operar de manera más sencilla.
  Para ello, debemos factorizar su numerador y denominador y, simplificar el o los factores comunes.
  Debemos descartar los valores de la variable que anulan los factores simplificados.

EJEMPLOS:

1) $\frac{x^2-4x+4}{5x^2-10x}=\frac{(x-2)^2}{5x\,(x-2)}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{5x\,\cancel{(x-2)}}=\frac{x-2}{5x}$, con $x \neq 2$ (es la condición para poder simplificar)

Factorización:

- El numerador es de grado 2, podemos aplicar la fórmula *resolvente*. Obtenemos que 2 es una raíz doble.
- En el denominador sacamos factor común 5x.

Finalmente reescribimos el numerador y simplificamos.

2) $\frac{x^4+2x^3-3x^2}{4x^3-36x}=\frac{x^2.(x^2+2x-3)}{4x\,(x^2-9)}=\frac{\cancel{x}.x.\cancel{(x+3)}(x-1)}{4.\cancel{x}\cancel{(x+3)}(x-3)}=\frac{x\,(x-1)}{4\,(x-3)}$, con $x \neq 0$ y -3 (es la condición para poder simplificar)

Factorización:

- En el numerador sacamos factor común (x^2) y luego aplicamos la fórmula *resolvente* (las raíces son -3 y 1).
- En el denominador sacamos factor común (4x) y nos queda una diferencia de cuadrados.

Finalmente reescribimos el numerador y simplificamos.

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Para operar con **EAR** aplicamos propiedades y técnicas similares a las utilizadas para operar con fracciones numéricas.

SUMA Y RESTA

- Si tiene igual denominador, se suma o se resta sus numeradores.
- Si tiene distinto denominador, buscamos EAR equivalentes con el mismo denominador y se suma o se resta los numeradores obtenidos.
- Simplificamos la expresión hallada y aclaramos la condición que debe cumplir la variable.

EJEMPLOS:

- $\frac{3x-5}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{4x-4}{x^2-1}=\frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{4}{x+1}$ con $x \neq 1$

- $\frac{2}{x}+\frac{x+5}{x^2}-\frac{4-x}{x^3}=\frac{2\,.\,x^2}{x\,.\,x^2}+\frac{(x+5)\,.\,x}{x^2\,.\,x}-\frac{4-x}{x^3}=\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x^2+5x}{x^3}-\frac{4-x}{x^3}=\frac{3x^2+6x-4}{x^3}$
  - El común denominador es x^3.
  - Buscamos fracciones equivalentes con ese denominador multiplicando respectivamente por x^2 y x.
  - Aplicamos propiedad distributiva y luego sumamos y restamos los numeradores.

- $\frac{2x}{x+3}+\frac{3x-1}{x^2-9}=\frac{2x.(x-3)}{(x+3).(x-3)}+\frac{3x-1}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x^2-6x+3x-1}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x^2-3x-1}{(x+3)(x-3)}$
    - Factorizamos el segundo denominador (*diferencia de cuadrados*)
    - El común denominador es (x+3) (x – 3).
    - Buscamos fracciones equivalentes con ese denominador multiplicando la primera fracción por (x-3).
    - Aplicamos propiedad distributiva y luego sumamos y restamos los numeradores.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Para multiplicar o dividir dos **EAR**, aplicamos las mismas definiciones que para operar con fracciones.

$$\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\,.\,C(x)}{B(x)\,.\,D(x)} \quad \text{y} \quad \frac{A(x)}{B(x)}:\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{D(x)}{C(x)}$$

Sugerencia: Es conveniente factorizar numeradores y denominadores y, simplificar antes de operar.

EJEMPLOS:

- $\frac{2x+4}{x^2-1}\cdot\frac{3x+3}{x+2}=\frac{2\,(\cancel{x+2})\,.\,3\,(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x-1)\,(\cancel{x+2})}=\frac{6}{x-1}$ con $x \neq -2$ y -1
    - Sacamos factor común de cada numerador.
    - En el denominador desarrollamos la diferencia de cuadrados.
    - Simplificamos, multiplicamos y aclaramos la condición que debe cumplir la variable.

- $\frac{x^2-9}{3x^2}:\frac{4x-12}{x^2}=\frac{x^2-9}{3x^2}\cdot\frac{x^2}{4x-12}=\frac{(x+3)\,(\cancel{x-3})\,\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}\,.\,4(\cancel{x-3})}=\frac{x+3}{12}$ con $x \neq 0$ y 3
    - Invertimos la segunda fracción.
    - Desarrollamos la diferencia de cuadrados del primer numerador y sacamos factor común en el segundo denominador (4).
    - Simplificamos, multiplicamos y aclaramos la condición que debe cumplir la variable.

ECUACIONES RACIONALES

Se denomina **ecuación racional** a toda expresión del tipo: $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ con $Q(x) \neq 0$.

Resolverla significa hallar los valores de x que pertenezcan al dominio de la función racional asociada y que anulen el numerador.

EJEMPLO: Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=0$ y $x \neq -2$ y $x \neq 3$

$\frac{x-3+x+2}{(x+2)(x-3)}=0$, resolvemos el término de la izquierda

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)}=0$$

$2x-1=0$, para que la fracción sea igual a 0 el numerador debe ser 0.

$\mathbf{x}=\frac{1}{2}$ despejando x

S = $\{\frac{1}{2}\}$

b) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}=-1$ y $x \neq 0$

$\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+1=0$, igualamos a 0

$\frac{2x-3+x^2}{x^2}=0$, resolvemos

$x^2+2x-3=0$, para q la fracción sea igual a 0 el numerador debe ser 0

$(x+3)(x-1)=0$, factorizamos

$x=-3$ o $x=1$

S = {-3, 1}

FUNCIONES

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemática. Cualquier estudio que se refiera a la aplicación de la matemática a problemas prácticos, o que requiera el análisis de datos, emplea este concepto matemático.

Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Los ejemplos siguientes aclaran esta idea:
1. El costo semanal de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos. Decimos que el costo se da en función del número de artículos.
2. La cantidad de cierto artículo que el fabricante ofrecerá depende del precio que pueda lograr. La cantidad está en función del precio.

Empezaremos dando la definición formal de una función.

DEFINICIÓN: Se llama **función** a toda relación entre los elementos de dos conjuntos A y B, de modo que a todo elemento perteneciente al conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

- Una función **f: A → B** es una correspondencia que a ***cada x*** que pertenece a A le asigna ***un único y*** que pertenece a B.

Por lo general, una función se denota por letras como *f, g, h, ...*

Al conjunto A lo llamamos dominio (Dom f = A) y al conjunto B codominio (Codom f = B)

- El **dominio** de f es el conjunto de elementos para los que la función existe.

- La **imagen** de f es el conjunto de valores que alcanza f, es decir:
  $$Im\ f = \{ y \in B \ / \ \exists x \in A \text{ con } f(x) = y \}$$
  La imagen de una función es un subconjunto del codominio. (Im f $\subset$ Codom f)

EJEMPLO: Sea *A* el conjunto de estudiantes en una clase. Sea *f* la regla que asigna a cada estudiante su calificación final. Dado que cada estudiante tiene una sola calificación final, esta regla define una función. En este caso, el **dominio** es el conjunto de todos los estudiantes en la clase y la **imagen** es el conjunto de todas las calificaciones obtenidas.

Si una función *f* asigna un valor ***y*** en el codominio a cierta ***x*** en el dominio, escribimos $y = f(x)$

Leemos *f*(*x*) como "*f* de *x*"; se denomina el *valor de* f *en* x.

Si una función *f* se expresa por una relación del tipo $y = f(x)$, entonces ***x*** se denomina la **variable independiente** e ***y*** se conoce como la **variable dependiente**.

En general, encontraremos funciones que se expresan estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente de que se trate.
Por ejemplo, $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$ o $f(x) = 3x + 1$

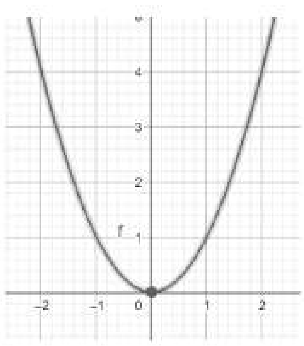
FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

En esta parte trabajaremos con funciones en las que, tanto el dominio como el codominio, serán conjuntos de números reales. Se expresa:

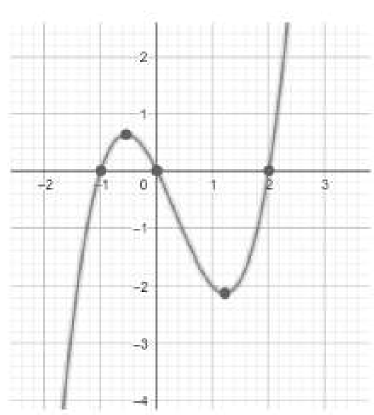
$f: A \rightarrow B \,/\, y = f(x), \quad A \subset R \wedge B \subset R$ A: dominio, B: codominio

En gran parte de los casos, los dominios e imágenes de las funciones con las cuales estaremos trabajando son subconjuntos de los números reales. En tales casos, la función por lo regular se representa por su *gráfica*. La gráfica de una función *f* se obtiene dibujando todos los puntos (x, y), en donde x pertenece al dominio de f e $y = f(x)$, manejando x e y como coordenadas cartesianas.

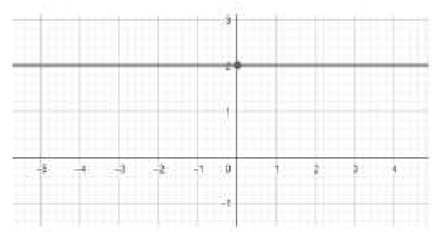
EJEMPLO: Los siguientes gráficos corresponden a funciones cuyo dominio es R, codominio es R (Codom=R), y sus imágenes varían.



$f(x) = x^2$
Dom f = R
Im f= $[0; +\infty)$



$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$
Dom f = R
Im f= R



$f(x) = 2$
Dom f = R
Im f= {2}

EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

EJEMPLO: Dada $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, calcule el valor de f cuando $x = 0$, $x = 3$ y $x = -2$.

Es decir, determine $f(0)$, $f(3)$ y $f(-2)$

Solución: Calculemos $f(0)$, reemplazamos a x por **0** en la expresión: $\boldsymbol{f(0)} = 2.\mathbf{0}^2 - 5.\,\mathbf{0} + 1 = \mathbf{1}$

Para hallar $f(3)$, sustituimos 3 en lugar de x en la expresión: $\boldsymbol{f(3)} = 2\,.\,\mathbf{3}^2 - 5\,.\,\mathbf{3} + 1 = 18 - 15 + 1 = \mathbf{4}$

De manera similar, $\boldsymbol{f(-2)} = 2\,.\,(-2)^2 - 5\,.\,(-2) + 1 = \mathbf{19}$

EJEMPLO: Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe $f(a)$, $f(-a)$ y $f(a + h)$

Solución: Calculemos $f(a)$, reemplazamos a x por a en la expresión: $\boldsymbol{f(a)} = 2.\boldsymbol{a}^2 + 3.\boldsymbol{a} - 1 = \boldsymbol{2a^2 + 3a - 1}$

Para hallar $f(-a)$, reemplazamos a x por $-a$ en la expresión: $\boldsymbol{f(-a)} = 2\,.\,(\boldsymbol{-a})^2 + 3.\,(\boldsymbol{-a}) - 1 = \boldsymbol{2a^2 - 3a - 1}$

Para hallar $f(a + h)$, reemplazamos a x por $a + h$ en la expresión y resolvemos:
$\boldsymbol{f(a + h)} = 2.(\boldsymbol{a + h})^2 + 3.(\boldsymbol{a + h}) - 1 = 2.(a^2 + 2.a.h + h^2) + 3a + 3h - 1 = \boldsymbol{2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1}$

EXTRACCIÓN DE INFORMACIÓN DADO EL GRÁFICO

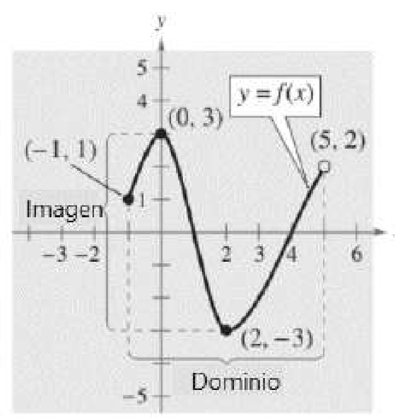
EJEMPLO: Dado el gráfico de la función *f*, que se muestra en la figura, halla:

a) el dominio de *f* b) los valores $f(-1)$ y $f(2)$ c) la imagen de *f*.

Solución: a) El punto cerrado en (-1,1) indica que x = -1 está en el dominio de *f* y el punto abierto en (5,2) indica que x = 5 no está en el dominio. Por lo tanto, el dominio de *f* es toda x en el intervalo [-1,5), es decir **Dom *f* = [-1,5).**

b) Como (-1,1) es un punto en la gráfica de *f*, se deduce que ***f*(-1) = 1**. Del mismo modo, como (2,-3) es un punto en la gráfica de *f*, se deduce que ***f*(2) = -3**.

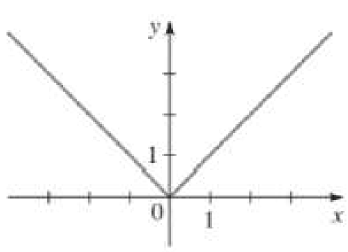
c) Como la gráfica no se prolonga debajo de $f(2) = -3$ ni arriba de $f(0) = 3$, la imagen de f es el intervalo [-3,3], es decir **Im f = [-3,3]**



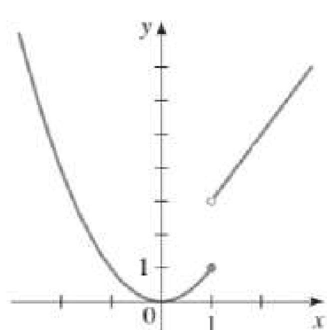
FUNCIÓN CONTINUA

El uso de puntos (abiertos o cerrados) en los puntos extremos izquierdo y derecho de una gráfica indica que la gráfica no se prolonga más allá de estos puntos. Si no se muestran esos puntos, suele considerarse como dominio y codominio el conjunto R.

Una función se llama continua si su gráfica no tiene "rupturas" o "huecos".



$f : R \to R$, $f(x) = |x|$
f es continua



$f : R \to R$, es discontinua en x = 1

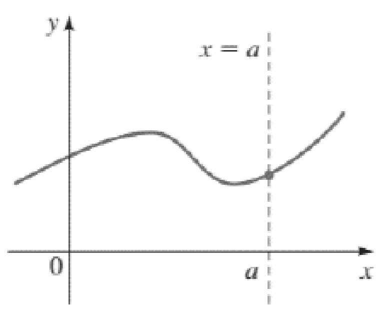
PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL PARA FUNCIONES

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta por medio de la siguiente prueba.

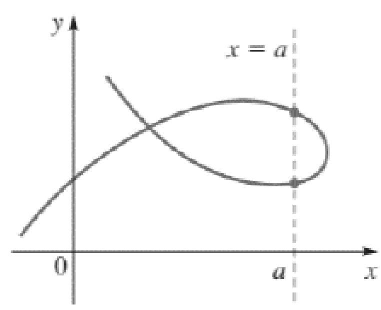
Por la definición de una función, a lo sumo un valor de *y* corresponde a un valor de *x* determinado. Esto significa que la gráfica de una función no puede tener dos o más puntos diferentes con la misma coordenada x; dos puntos en la gráfica de una función no pueden estar verticalmente arriba o abajo uno del otro. Se deduce, por lo tanto, que una recta vertical puede intersecar la gráfica de una función a lo sumo una vez. Esta observación da una cómoda prueba visual llamada prueba de la recta vertical para funciones.

- *Una curva en el plano de coordenadas cartesianas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.*

EJEMPLO:



Es función
(cruza la curva una sola vez)



No es función
(cruza la curva dos veces)

CÁLCULO DE DOMINIOS

- Si la expresión de la función es un **polinomio**, el dominio son todos los reales.
  Ejemplo: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, **DOM f = R**

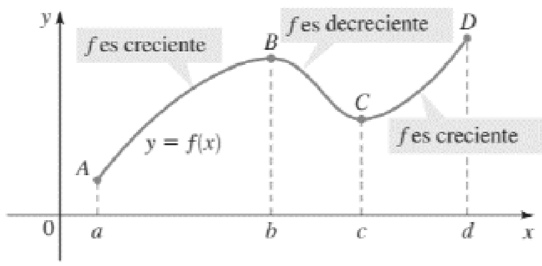
- Si la expresión de la función es un **cociente**, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.
  Ejemplo: $f(x) = \frac{2}{x-1}$, **DOM f = R – {1}**

- Si la expresión de la función es una **raíz cuadrada**, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.
  Ejemplos: $f(x) = \sqrt{x+3}$, **DOM f = [-3 ; +∞);**
  $x + 3 \geq 0$
  $x \geq 0 - 3$
  $\mathbf{x \geq -3}$

  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, **DOM f = (2 ; +∞)**
  $x - 2 \geq 0$ y $x - 2 \neq 0$
  $\mathbf{x \geq 2}$ **y** $\mathbf{x \neq 2}$

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

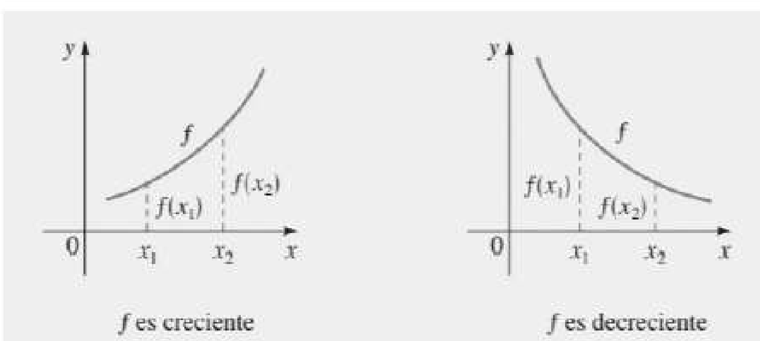
Es útil saber en dónde sube la gráfica y en dónde baja. En la siguiente gráfica se ve que sube, baja y luego sube de nuevo a medida que avanzamos de izquierda a derecha: sube de *A* a *B*, baja de *B* a *C* y sube otra vez de *C* a *D*. Podemos observar que la función f es creciente cuando su gráfica sube y decreciente cuando baja.



f es creciente en *[a, b)* y en *(c, d]*, f es decreciente en *(b, c)*.

DEFINICIÓN:

- **f es creciente** en un intervalo del dominio de f, si para todo par de números de dicho intervalo, si $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$
- **f es decreciente** en un intervalo del dominio de f, si para todo par de números de dicho intervalo, si $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$
- **f es constante** en un intervalo del dominio de f, si para todo par de números $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ del intervalo, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$

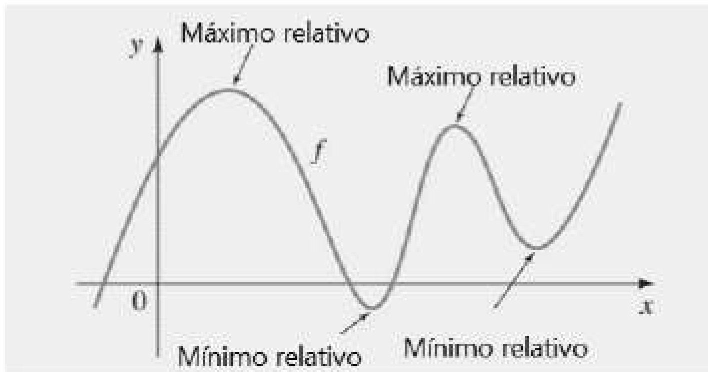


MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS (O LOCALES) DE UNA FUNCIÓN

Hallar los valores **máximo** y **mínimo** de una función es importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, si una función representa ingreso o utilidad, entonces estamos interesados en su valor máximo. Para una función que representa costo, desearíamos hallar su valor mínimo.
Podemos hallar estos valores a partir de la gráfica de una función.

Definiciones:

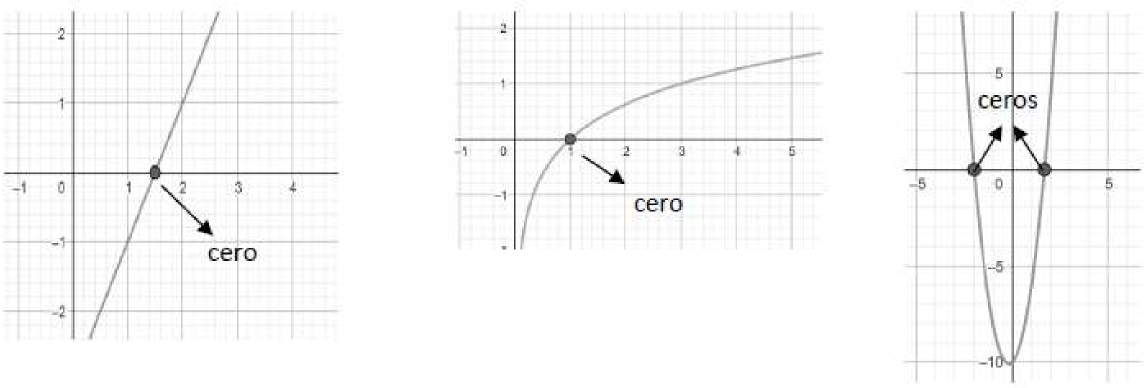
- El valor de una función *f(a)* es un **máximo relativo** de *f* si $f(a) \geq f(x)$ cuando x es cercana a *a*
  (esto significa que $f(a) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a *a*)
  En este caso decimos que *f* tiene un **máximo relativo** en x = *a*
- El valor de una función *f(a)* es un **mínimo relativo** de *f* si $f(a) \leq f(x)$ cuando x es cercana a *a*
  (esto significa que $f(a) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a *a*)
  En este caso decimos que *f* tiene un **mínimo relativo** en x = *a*



CEROS O RAÍCES DE UNA FUNCIÓN

Si la gráfica de una función tiene una intersección con el eje x en $(a, 0)$, entonces a es un cero o raíz de la función.

- Los ceros de una función f son los valores de x pertenecientes al dominio para los cuales $f(x) = 0$.



Para hallar los ceros de una función, la igualamos a 0 y despejamos la variable independiente.

- **Conjunto de ceros, $C_0 = \{ x \in \text{Dom } f \,/\, f(x) = 0\}$**

EJEMPLO: Halla los ceros de cada una de las siguientes funciones. Escribe el conjunto de ceros.

a) $f(x) = 3x^2 + x - 10$ b) $g(x) = \sqrt{10 - x^2}$ c) $h(x) = \frac{2x-3}{x+5}$

Solución:

a) - Igualamos a 0, $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 10 = 0$

- Resolvemos la ecuación, aplicando la fórmula de la resolvente, $\mathbf{x = \frac{5}{3}}$ y $\mathbf{x = -2}$ son los ceros de la función.

$\mathbf{C_0 = \{-2 , \frac{5}{3}\}}$ es el conjunto de ceros.

b) - Igualamos a 0, $g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{10 - x^2} = 0 \Rightarrow 10 - x^2 = 0$

- Resolvemos la ecuación, $10 - x^2 = 0 \Rightarrow 10 = x^2 \Rightarrow \sqrt{10} = |x| \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$

$\mathbf{x = \sqrt{10}}$ y $\mathbf{x = -\sqrt{10}}$ son los ceros de la función.

$\mathbf{C_0 = \{-\sqrt{10} , \sqrt{10}\}}$

c) - Igualamos a 0, $h(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+5} = 0$,

$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{3}{2}}$ es el cero de la función

$\mathbf{C_0 = \{\frac{3}{2}\}}$

Para que una fracción sea equivalente a 0 el numerador debe ser 0 y el denominador distinto de 0

CONJUNTO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

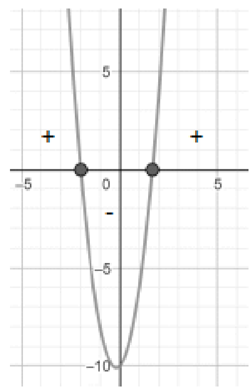
- Los intervalos en los que la función es positiva se llama: "conjunto de positividad", se simboliza como C_+ y se define como: C_+ **= { x ∈ Dom f / f(x) > 0}**
- Los intervalos en los que la función es negativa se llama: "conjunto de negatividad", se simboliza como C_- y se define como: C_- **= { x ∈ Dom f / f(x) < 0}**

EJEMPLO: Halla los conjuntos de positividad de la función $f(x) = 3x^2 + x - 10$

En el ejemplo anterior hallamos el conjunto de ceros (aplicando la resolvente), $\mathbf{C_0 = \{ -2 , \frac{5}{3}\}}$.

Graficamos las funciones para identificar C_+ y C_-

$C_+ = (-\infty ; -2) \cup (\frac{5}{3} ; +\infty)$
$C_- = (-2 ; \frac{5}{3})$



FUNCION LINEAL

Se llama ***función lineal*** a aquella cuya fórmula es ***f(x) = ax + b***, con a y $b \in$ R

a recibe el nombre de ***pendiente*** y representa cuánto varía f(x) por cada unidad que aumenta x.
b es la ***ordenada al origen*** y es la ordenada del punto en el que la gráfica de la función corta al eje y.
La representación gráfica de una función lineal es una ***recta***.

Ecuación explícita de la recta: $y = ax + b$

- La pendiente (a) de una recta es el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx) de cualquier punto de la misma. Es un número asociado a su inclinación.

  Si conocemos las coordenadas de dos puntos de una recta $p = (x_1 ; y_1)$ y $q = (x_2 ; y_2)$, podemos calcular su pendiente mediante la siguiente fórmula:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- La ***ordenada al origen*** es el valor donde la recta corta al eje y. ***f(0) = b***
- El valor de la pendiente determina el comportamiento de la función lineal: Si a > 0, es creciente
  Si a < 0, es decreciente
  Si a = 0, es constante

El ***dominio*** de una función lineal es el conjunto de todos los números reales debido a que la ecuación de la recta representa un número real para todo número real *x*. (**Dom f = R**)

- Si **a ≠ 0**, la imagen de la función lineal es el conjunto de los reales. (**Im f = R**)
- Si **a = 0**, la función sería f(x) = b por lo tanto la imagen es b. (**Im f = {b}**)

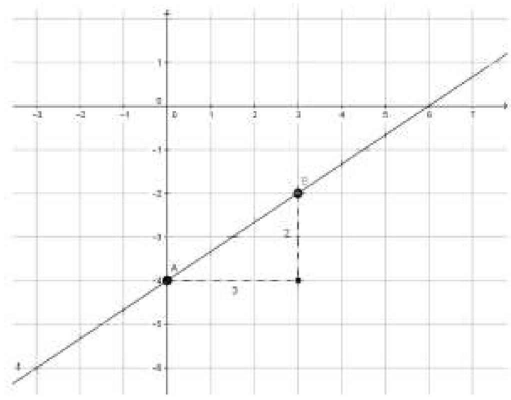
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Para graficar una función lineal, se puede utilizar distintos métodos.

1) Se realiza una tabla de valores, se ubican en un sistema de ejes cartesianos y se unen.
2) Se tienen en cuenta la ordenada al origen y la pendiente: Se marca la ordenada al origen (b) y, a partir de ella, se representa un par de valores cuyo cociente sea igual al valor de la pendiente (a).

EJEMPLO: Grafiquemos la recta $y = \frac{2}{3}x - 4$ (aplicamos el método 2)

- $a = \frac{2}{3}$ y $b = -4$
- Marcamos sobre el eje y la ordenada al origen (-4). (Punto A)
- A partir de ese punto avanzamos 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba, y marcamos otro punto. (Punto B)
- Trazamos la recta uniendo los dos puntos que marcamos.



ECUACIÓN DE LA RECTA DADA LA PENDIENTE Y UN PUNTO POR DONDE PASA

EJEMPLO: Hallemos la ecuación de la recta cuya pendiente es 2 y pasa por (1 ; 3)

- La ecuación de la recta es y = ax + b
- Reemplazamos el valor de la pendiente (**a = 2**), $y = \mathbf{2}x + b$
- Para buscar el valor de b, reemplazamos el **punto (1 ; 3)** y despejamos:

$$\mathbf{3} = 2 \cdot \mathbf{1} + b$$
$$3 = 2 + b$$
$$3 - 2 = b$$
$$\mathbf{1 = b}$$

- La ecuación de la recta es ***y = 2x + 1***

ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS DE LA MISMA

1°) Si se conocen dos puntos $p = (x_1 ; y_1)$ y $q = (x_2 ; y_2)$, se calcula la pendiente reemplazando en:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2°) Con la pendiente y uno de los puntos dados, busco la ecuación de la recta.

EJEMPLO: Hallemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4 ; -1) y (2 ; -3)

1°) $a = \frac{-3+1}{2-4} = \frac{-2}{-2} = 1$

2°) Reemplazamos la pendiente: $y = \mathbf{1}\,x + b$

elegimos uno de los puntos, **(4 ; -1)** $\mathbf{-1} = 1 \cdot \mathbf{4} + b$

reemplazamos y despejamos $-1 = 4 + b$

$$-1 - 4 = b$$
$$\mathbf{-5 = b}$$

La ecuación de la recta es: ***y = x – 5***

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

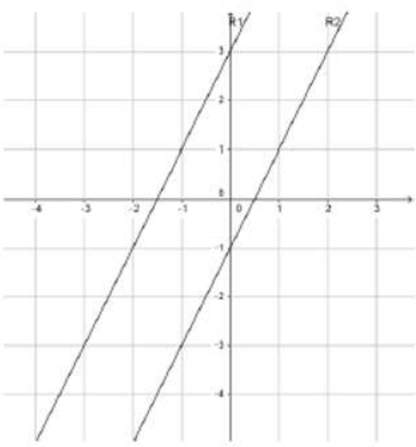
- Dos rectas son ***paralelas*** si y solo si sus pendientes son iguales.
  R_1: $y = a_1x + b_1$ y R_2: $y = a_2x + b_2$, $R_1 // R_2 \leftrightarrow a_1 = a_2$

- Dos rectas son ***perpendiculares*** si y solo si el producto de sus pendientes es -1.
  R_1: $y = a_1x + b_1$ y R_2: $y = a_2x + b_2$, $R_1 \perp R_2 \leftrightarrow a_1 . a_2 = -1$; $a_1 = -\frac{1}{a_2}$
  Las pendientes son inversas y opuestas.

EJEMPLOS:

R_1: $y = 2x + 3$, $a_1 = 2$
R_2: $y = 2x - 1$, $a_2 = 2$

$a_1 = a_2 = 2$ **$R_1 // R_2$**



R_1: $y = 2x - 3$, $a_1 = 2$

R_2: $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$

$a_1 . a_2 = 2 . \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$R_1 \perp R_2$

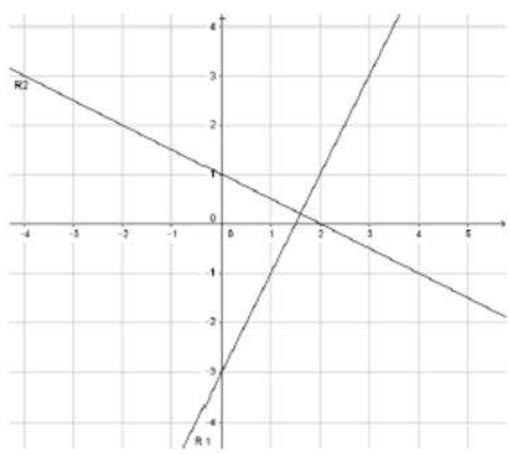


GRÁFICO DE FUNCIONES POR TRAMOS

una **función definida por tramos** es una función cuya expresión varía según el valor que toma la variable independiente x.

EJEMPLO:

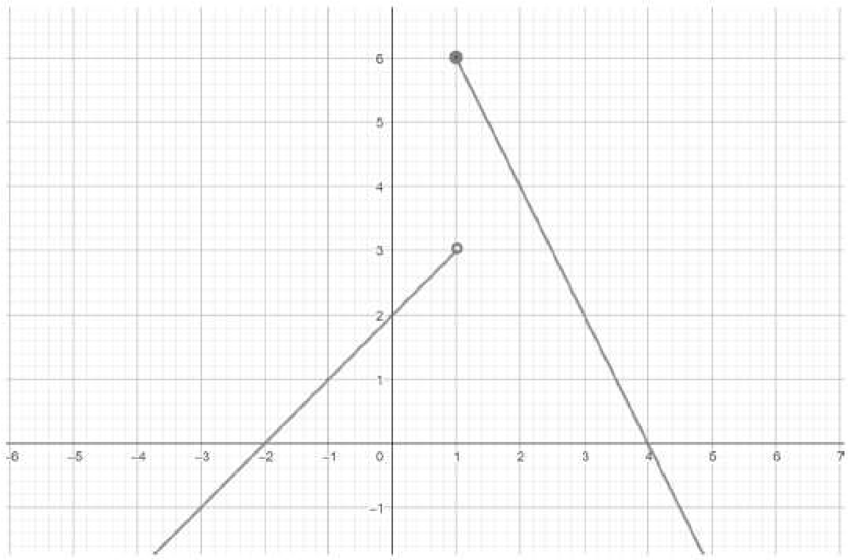
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función tiene dos tramos distintos:
1) si x es menor que 1 la función es x+ 2
2) si x mayor o igual que 1 la función es -2x + 8.

Vamos a graficar los dos tramos en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

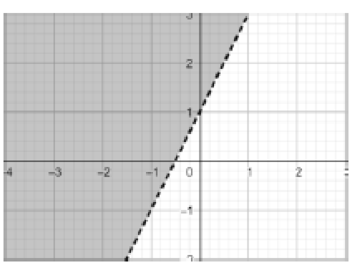
El tramo 1) es una función lineal y su gráfico es una recta (en este caso es una semirrecta ya que los valores de $x \in (-\infty ; 1)$. Podemos realizar una tabla de valores y representarla.
En el final del tramo dibujamos un "o" (cero) ya que el valor 1 para x no está incluido.
El tramo 2) también es una función lineal y su gráfico es una semirrecta, los valores de $x \in [1 ;+\infty)$. Podemos realizar una tabla de valores y representarla.
En el inicio del tramo dibujamos un "círculo" ya que el valor 1 para x está incluido.

El gráfico que obtenemos es el siguiente:

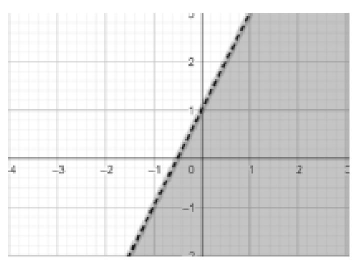


DESIGUALDADES LINEALES

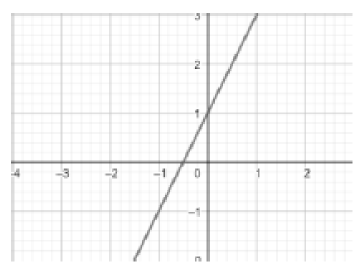
Consideremos la recta $y = 2x + 1$. Esta recta divide al plano cartesiano en tres regiones: la parte de arriba de la recta, la parte de abajo de la recta y la parte sobre la recta, lo que representamos en la figura:



$y > 2x + 1$



$y < 2x + 1$



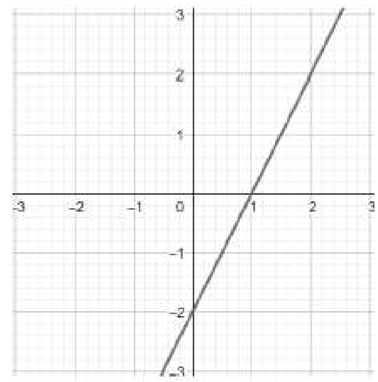
$y = 2x + 1$

Como la región encima de la recta tiene ordenada mayor, la región está representada por la desigualdad $y > 2x + 1$. De la misma forma $y < 2x + 1$, representa la región de abajo de la línea recta, mientras que $y = 2x + 1$ representa los puntos sobre la línea recta.

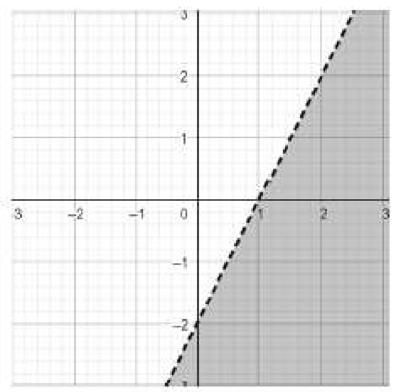
Toda recta no vertical divide al plano en tres regiones: la región que está por encima de la recta dada por $y > ax + b$, la región que está por debajo de la recta dada por $y < ax + b$ y la región que está exactamente sobre la recta dada por $y = ax + b$.
Si la recta es vertical, las regiones en que queda dividido el plano son: la parte a la derecha de la recta, la parte la izquierda de la recta y la parte sobre la recta.

EJEMPLO 1: Representa la región dada por: a) $y = 2x - 2$, b) $y < 2x - 2$, c) $y \leq 2x - 2$, d) $y \neq 2x - 2$

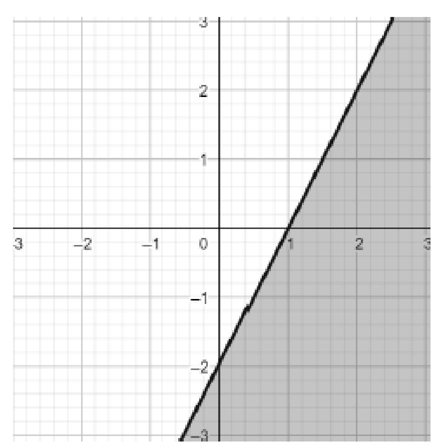
a) La región consiste en todos los puntos que están sobre la recta, lo representamos:



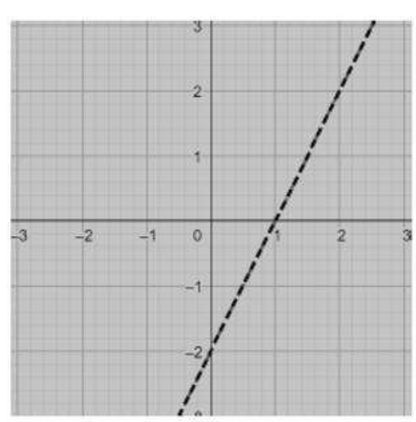
b) En este caso, como la ordenada y es menor que $2x - 2$ ($y < 2x - 2$), la región consiste en los puntos que están por debajo de la recta y no incluye los puntos de la recta. Esto se representa con la línea recta punteada (para indicar que no se incluye) y sombreando la región.



c) Para este caso, recordemos que el símbolo $\leq$ representa una de dos opciones: $y < 2x - 2$, o bien $y = 2x - 2$, pero ambos casos son precisamente los anteriores, así que la región corresponde a la unión de los mismos. En otras palabras, la región consta de los puntos en el plano cartesiano que están por debajo de la recta y también de los puntos de la recta. Representamos esto sombreando la región, igual que en el inciso anterior, pero la recta no es punteada, sino completa para representar que también se incluye.

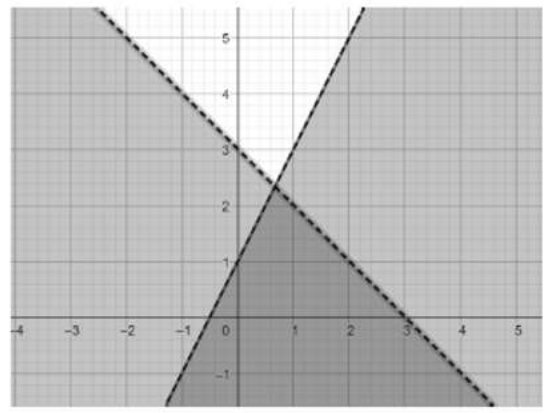


d) $y \neq 2x - 2$ representa que o bien $y < 2x - 2$, o bien $y > 2x - 2$, es decir, la región consiste en los puntos del plano que están encima de la recta y debajo de la recta, pero no sobre la recta. En este caso la representación consiste en sombrear todo el plano y dibujar la recta con una línea punteada para representar que no se incluye.



EJEMPLO 2: Representa la región dada por las desigualdades $y < 2x + 1$ e $y < 3 - x$

La región está dada por dos desigualdades, así que su gráfica corresponde a la intersección de la gráfica de cada desigualdad.
La región consiste en los puntos en el plano que simultáneamente están por debajo de las rectas $y = 2x + 1$ e $y = 3 - x$.



FUNCIÓN POLINÓMICA

Toda función f: R → R de la forma: $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ con $a_i \in R$ y $n \in N_0$
Se denomina ***función polinómica*** de variable real.

La expresión $P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ se denomina ***polinomio*** en una indeterminada de x.

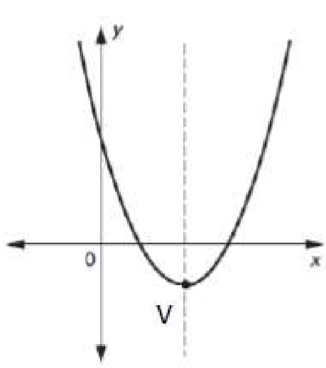
- Si $a_n \neq 0$ entonces el ***grado*** del polinomio está dado por el exponente "n".
- Si el grado es ***1***, la función asociada corresponde a una ***función lineal***.
- Si el grado es ***2***, la función asociada corresponde a una ***función cuadrática***.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

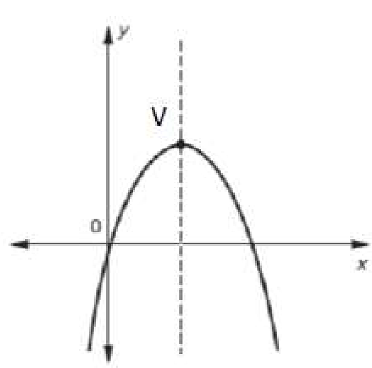
Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) con *a, b* y *c* constantes, se denomina ***función cuadrática***.

- El dominio de $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales.
- La gráfica es una ***parábola*** que se abre hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$.
- Su vértice (que es el punto más bajo si $a>0$ y el punto más alto si $a<0$) es el punto con coordenadas $V = (x_V\, ;\, y_V)$

GRÁFICOS:



$a > 0$



$a < 0$

Notas: **1.** Si $b = c = 0$, la función cuadrática se reduce a $f(x) = ax^2$. Las coordenadas del vértice serían $x_v = 0$ e $y_v = 0$, es decir V = (0 ; 0)

2. La parábola es simétrica con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice. Esta recta se conoce como ***eje de simetría*** de la parábola y la ecuación es $\mathbf{x = x_v}$.

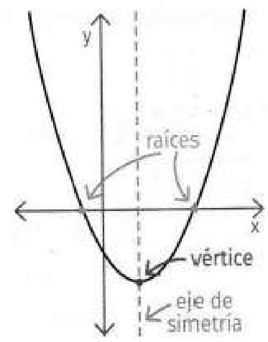
3. La ordenada al origen es **c** o el punto (0 ; c).

Para realizar el gráfico de una parábola, se debe hallar las raíces, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen.

Buscamos los elementos:

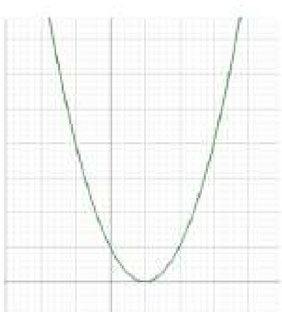
- Raíces: $x_1; x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Vértice: $V = (x_v ; y_v)$, $x_v = -\frac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$

  Para buscar y_v, reemplazamos x_v en la función.
- Eje de simetría es la recta $x = x_v$
- Ordenada al origen: c o el punto (0 ; c)

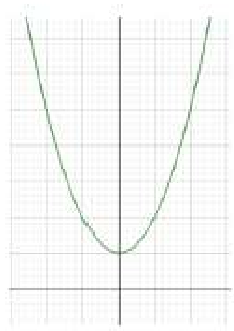


Nota: Una función cuadrática puede tener ninguna, una o dos raíces reales distintas.
Analizando el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ obtenemos que:

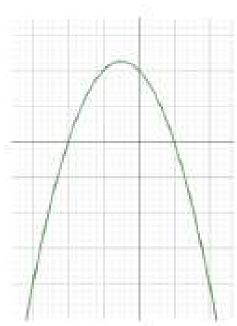
	raíces	*gráfica*
$\Delta > 0$	Dos reales y distintas	Corta al eje x en dos puntos
$\Delta = 0$	Una real (doble)	Corta al eje x en un punto
$\Delta < 0$	No tiene raíces reales	No corta al eje x



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$



$\Delta > 0$

EJEMPLO: Realiza el gráfico aproximado de $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$ hallando previamente los elementos.

Comparando con la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, obtenemos que $a = 2$, $b = -4$ y $c = 7$.

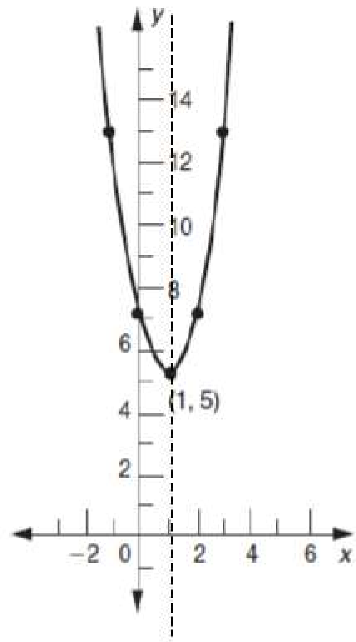
- Buscamos las coordenadas del vértice. $x_v = -\frac{-4}{2.2} = \frac{4}{4} = 1$, $\mathbf{x_v = 1}$

  Para encontrar y_v reemplazamos x_v por 1, $\mathbf{y_v} = 2 \,.\, 1^2 - 4 \,.\, 1 + 7 = \mathbf{5}$ El vértice es **V = (1 ; 5)**
- Dado que $a = 2 > 0$, la parábola se abre hacia arriba; es decir, que el vértice (1, 5) es el mínimo de la parábola.
- El **eje de simetría** es la recta **x = 1.**

Al dibujar la gráfica de una función dada, a menudo es útil encontrar los puntos en que su gráfica corta los ejes de coordenadas: ordenada al origen (corta al eje y) y las raíces (cortan al eje x).

- La ordenada al origen es 7 (pasa por el punto (0 ; 7)). Como no está en el eje de simetría se puede ubicar el punto simétrico [(2 ; 7)]
- Se pueden buscar las raíces aplicando la fórmula resolvente y en este caso al obtener un discriminante negativo podemos afirmar que no tiene raíces reales, es decir no corta al eje x.
- En caso de ser necesario busco un punto adicional que pertenezca a la función, lo marcamos en el gráfico y ubicamos su simétrico. (*Se marcaron los puntos (3 ; 13) y (-1 ; 13)*)

El gráfico aproximado sería:



$$f(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\textbf{polinómica}} = \underbrace{a\,(x - \mathbf{x_v})^2 + \mathbf{y_v}}_{\textbf{canónica}} = \underbrace{a\,(x - \mathbf{x_1})\,(x - \mathbf{x_2})}_{\textbf{factorizada}}$$

Desarrollando la ecuación canónica o la factorizada, se obtiene la ecuación polinómica.

EJEMPLO: Halla la ecuación canónica y factorizada de $y = 2x^2 - 4x - 6$

- *Forma factorizada:*

  Buscamos las raíces,

  $x_1;\, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.2.(-6)}}{2.2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}$; $x_1 = \frac{4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3$; $x_2 = \frac{4-8}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

  las raíces son $\mathbf{x_1 = 3}$ y $\mathbf{x_2 = -1}$; reemplazando en $\mathbf{y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$

  quedaría $y = 2\,(x - 3)\,(x - (-1)) = 2\,(x - 3)\,(x + 1)$

  la **forma factorizada es** $\mathbf{y = 2\,(x - 3)\,(x + 1)}$

- *Forma canónica:*

  Buscamos el vértice: $\mathbf{V = (1 ; -8)}$

  $x_v = -\frac{-4}{2.2} = -\frac{-4}{4} = -(-1) = 1$ e $y_v = -8$; reemplazando en $y = a\,(x - x_v)^2 + y_v$

  quedaría $y = 2\,(x - \mathbf{1})^2 + \mathbf{(-8)} = 2\,(x - 1)^2 - 8$

  la **forma canónica es** $\mathbf{y = 2\,(x - 1)^2 - 8}$

- Desarrollando las ecuaciones, se vuelve a obtener la ecuación polinómica.

  $2\,(x - 3)\,(x + 1) = 2\,(x^2 - 3x + x - 3) = 2\,(x^2 - 2x - 3) = \mathbf{2x^2 - 4x - 6}$

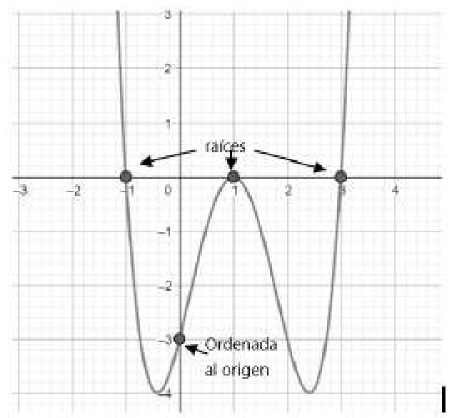
  $2\,(x - 1)^2 - 8 = 2\,(x^2 - 2x + 1) - 8 = 2x^2 - 4x + 2 - 8 = \mathbf{2x^2 - 4x - 6}$

GRÁFICO DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Para realizar el gráfico aproximado de una función polinómica debemos:

- Hallar la **ordenada al origen**, está determinada por el término independiente y es el punto $(0, a_0)$
- **Factorizar** el polinomio.
- Hallar las **raíces** indican las intersecciones con el eje x.
- Identificar el **orden de multiplicidad** de las raíces que indica que la gráfica:
  - **Rebota**, si es par o
  - **Atraviesa** el eje x, si es impar
- Hallar los **conjuntos de positividad y negatividad**, para lo cual se buscan valores del dominio entre dos raíces consecutivas para determinar si la función es positiva o negativa en ese intervalo.

EJEMPLO: Realiza el gráfico aproximado de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$



- Ordenada al origen: -3, paso por (0 , -3)
- Factorización: $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2(x - 3)$
- Intersecciones con el eje x (raíces):
  $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$
- Orden de multiplicidad:
  $x_1 = -1$, raíz impar $\Rightarrow$ la gráfica atraviesa al eje x
  $x_2 = 1$, raíz par $\Rightarrow$ la gráfica rebota en el eje x
  $x_3 = 3$, raíz impar $\Rightarrow$ la gráfica atraviesa al eje x
- Conjunto de positividad y negatividad:
  Observando el gráfico

$$\left.\begin{array}{l} \forall x: x \in (-\infty, -1),\ \mathbf{f(x) > 0} \\ \forall x: x \in (-1, 1) \Rightarrow \mathbf{f(x) < 0} \\ \forall x: x \in (1, 3) \Rightarrow \mathbf{f(x) < 0} \\ \forall x: x \in (3, +\infty) \Rightarrow \mathbf{f(x) > 0} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C_+ = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \\ C_- = (-1, 1) \cup (1, 3) \end{array}$$

FUNCIÓN RACIONAL

Se denomina ***función racional*** a toda función $f: A \to B$ tal que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

El ***dominio*** de una función racional es el conjunto de valores de la variable independiente que no anulan el denominador.

EJEMPLOS: Halla el dominio de las siguientes funciones.

- $f(x) = \frac{1}{x+1}$ el denominador es x +1, debe ser $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, Dom f = R – {-1}
- $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ el denominador es x – 2, debe ser $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, Dom f = R – {2}
- $f(x) = \frac{-2x^2+x}{x}$ el denominador es x, debe ser $x \neq 0$, Dom f = R – {0}

GRÁFICO DE FUNCIONES RACIONALES

Para realizar el gráfico aproximado de una función racional, debemos:

- Determinar el ***dominio***.
- Hallar la ***intersección con el eje y***, la cual existe si 0 (cero) pertenece al dominio de la función y es el punto (0; f(0)).
- Hallar las ***raíces o ceros*** de la función, que son los valores que pertenecen al dominio de la misma y que anulan la función, o sea, las raíces del numerador.
- Calcular la ***asíntota vertical*** de $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Para ello, transformamos f(x) en su expresión racional **irreducible** y luego buscamos el valor ***a*** para el cual se anula el denominador pero no el numerador, entonces: ***x = a*** es asíntota vertical (***A.V.***)
- Calcular la ***asíntota horizontal***, que en una función racional existe si el grado del polinomio numerador es menor o igual al grado del polinomio denominador.

Si ***gr P(x) < gr Q(x)*** $\Rightarrow$ ***y = 0*** es asíntota horizontal (***A.H.***)

Si ***gr P(x) = gr Q(x)*** $\Rightarrow$ $y = \frac{\text{coeficiente principal de } P(x)}{\text{coeficiente principal de } Q(x)}$ es ***A.H.***

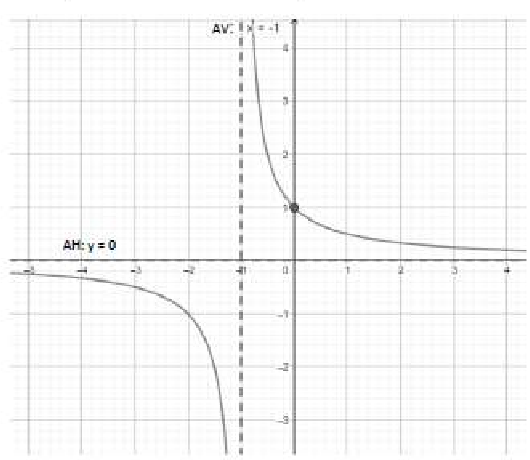
Nota: Informalmente hablando, una asíntota de una función es una recta a la que la gráfica de la función se acerca cada vez más cuando nos movemos a lo largo de la recta.

EJEMPLO: Busca los elementos de cada función y representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

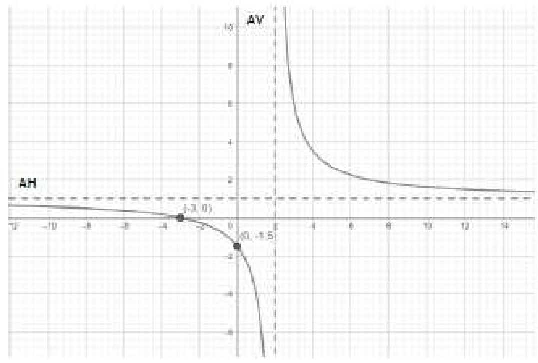
- ***Dom f = R – {-1}***
- *Intersección con el eje y*: (0; f(0)) = ***(0; 1)***
- *Raíces:*
  Son los valores que pertenecen al dominio y anulan el numerador, el numerador es 1 que es distinto de cero. ***No hay raíces.***
- *Asíntota vertical:*
  En este caso el denominador se anula en -1 y el numerador no.
  A.V. es x = -1
- *Asíntota horizontal:*
  gr P(x) = 0 y gr Q(x) = 1, gr P(x) < gr Q(x)
  $\Rightarrow$ ***A.H. es y = 0***

- En caso de considerarlo necesario podemos completar una tabla de valores para valores de x específicos.



b) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

- ***Dom f = R – {2}***
- *Intersección con el eje y*: (0; f(0)) = ***(0; -1,5)***
- *Raíces:*
  Son los valores que pertenecen al dominio y anulan el numerador, $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$, -3 está en el dominio entonces ***-3 es raíz***
- *Asíntota vertical:*
  En este caso el denominador se anula en 2 y el numerador no.
  A.V. es x = 2
- *Asíntota horizontal:*
  gr P(x) = gr Q(x) = 1, $\Rightarrow$ ***A.H. es*** $y = \frac{1}{1} = 1$
- En caso de considerarlo necesario podemos completar una tabla de valores para valores de x específicos.



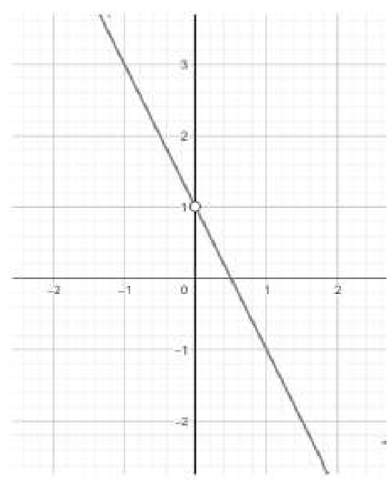
Importante: Si antes de graficar simplificamos la expresión racional, y trabajamos con la expresión equivalente, nos facilitan los cálculos. Debemos prestar atención a los dominios de la función original.

c) $f(x) = \frac{-2x^2+x}{x}$

Si buscamos la expresión irreducible nos quedaría:
$f(x) = \frac{-2x^2+x}{x} = \frac{\cancel{x}(-2x+1)}{\cancel{x}} =$ **-2x+1**, con $x \neq 0$ (condición para poder simplificar)

- En este caso al simplificar la expresión racional, obtuvimos una función lineal que no está definida para x=0. Recordemos que el dominio de la función original es R – {0}.

Para representarla gráficamente dibujaremos la recta y = -2x + 1 con un ¨hueco¨ en x = 0



FUNCIÓN IRRACIONAL

Una **función irracional** y = f(x) es aquella que puede obtenerse efectuando sobre la variable x la operación de radicación.

EJEMPLOS: $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x+2}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN IRRACIONAL

Para determinar el ***dominio*** de una función irracional: $\mathbf{y = \sqrt[n]{f(x)}}$ debemos discriminar dos casos en relación al índice n.

- Si n es **par,** la función está definida cuando el radicando es positivo o cero.

  EJEMPLO: $\mathbf{y = \sqrt{x}}$, x tiene que ser positivo o cero, es decir $\mathbf{x \geq 0}$ con lo cual: **Dom = [0 ; +∞)**

- Si n es **impar,** la función está definida para todo valor de x.

  EJEMPLO: $\mathbf{y = \sqrt[3]{x}}$, x puede tomar cualquier valor real con lo cual: **Dom = R**

- En el caso en que f(x) sea fraccionaria, tendremos que tener en cuenta las restricciones del dominio para este tipo de expresiones.

EJEMPLO: $\mathbf{y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$, por ser una función fraccionaria el denominador debe ser distinto de cero:

$\mathbf{\sqrt{x+1} \neq 0}$ y por ser irracional con índice par, el radicando debe ser positivo o 0: $\mathbf{x + 1 \geq 0.}$

Para que se verifiquen ambas condiciones debería ser: $x + 1 > 0 \Rightarrow \mathbf{x > -1,}$

con lo cual: **Dom = (-1 ;+∞)**

GRÁFICO DE FUNCIONES IRRACIONALES

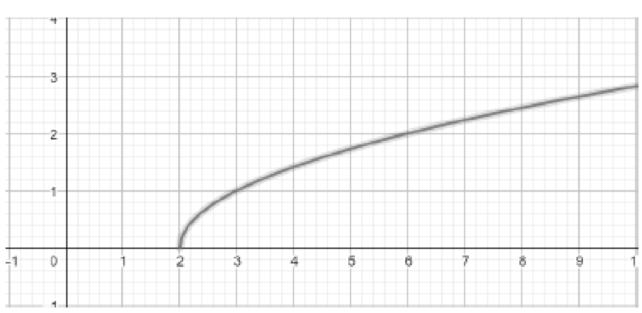
Para graficar ***funciones irracionales*** determinamos el dominio y luego realizamos una tabla de valores que nos faciliten los cálculos.

EJEMPLO: Realiza el gráfico aproximado de las siguientes funciones.

a) $\mathbf{f(x) = \sqrt{x-2}.}$ Buscamos el dominio, como el índice es par: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$, Dom = [2 ; +∞)

Completamos una tabla de valores (los valores de x deben pertenecer a dominio de la función) y los representamos en un sistema:

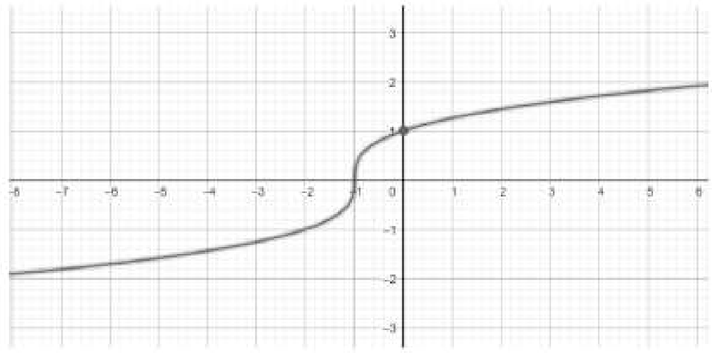
x	y
2	0
3	1
6	2
11	3



b) $\mathbf{f(x) = \sqrt[3]{x+1}}$. Como el índice es impar el Dom = R

Completamos una tabla de valores (los valores de x deben pertenecer a dominio de la función) y representamos los puntos en un sistema:

x	y
-9	-2
-2	-1
-1	0
0	1
7	2



FUNCIÓN EXPONENCIAL

Las funciones exponenciales se usan para modelar numerosos fenómenos del mundo real, como por ejemplo el crecimiento de una población o el crecimiento de una inversión depositado a interés compuesto.

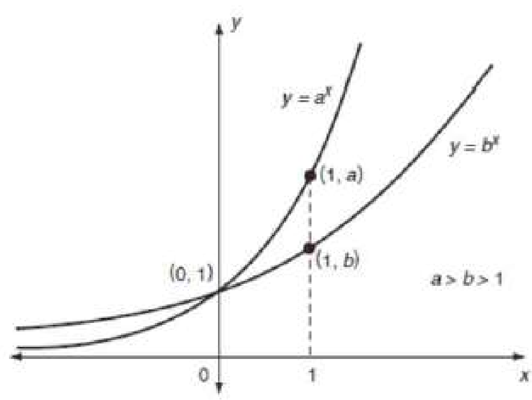
Una **función exponencial** es una función f: $R \to R^+$ tal que $\mathbf{f(x) = k \cdot a^x}$ donde $a \in \mathbf{R^+-\{1\}}$ **y** $\mathbf{k \in R-\{0\}}$

Si **k = 1**, la función resulta $\mathbf{f(x)=a^x}$ y su gráfica puede distinguirse de acuerdo a los valores que toma "*a*":

Cuando $\boldsymbol{a > 1}$, la función se conoce como una *función exponencial* ***creciente***, mientras que si $\boldsymbol{a < 1}$, se llama una *función exponencial* ***decreciente***.

La siguiente figura ilustra las gráficas de dos funciones, $\boldsymbol{y = a^x}$ e $\boldsymbol{y = b^x}$, con $\boldsymbol{a > b > 1}$.

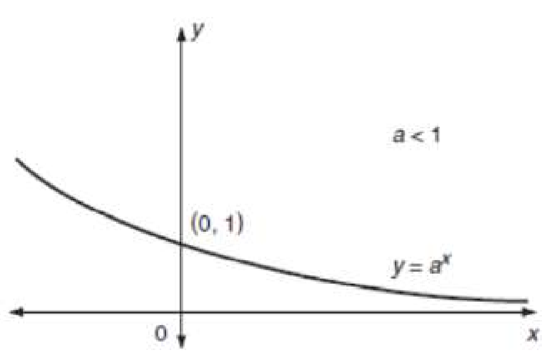
Se advierte que si $\boldsymbol{x > 0}$, estas dos funciones crecen a una tasa cada vez mayor a medida que *x* se incrementa.
Puesto que $a > b$, la gráfica de $y = a^x$ para valores positivos de *x* está por encima de la gráfica de $y = b^x$ y crece de manera más pronunciada.
Por otra parte, cuando $\boldsymbol{x < 0}$, ambas funciones decrecen hacia cero a medida que *x* se hace más y más negativa. En este caso, la función $y = a^x$ cae de manera más pronunciada que $y = b^x$ y su gráfica está situada por debajo de la gráfica correspondiente a $y = b^x$.



- Las gráficas se intersecan cuando $x = 0$, dado que $a^0 = b^0 = 1$.

La gráfica de $y = a^x$ cuando $a < 1$ aparece en la siguiente figura.

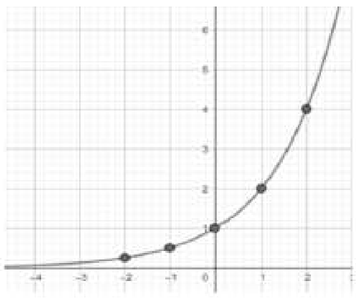
En el caso de que $\boldsymbol{a < 1}$, $y = a^x$ decrece cuando *x* se incrementa y se aproxima a cero a medida que *x* se hace más grande.
En consecuencia, la gráfica se aproxima al eje *x* cada vez más cuando *x* se hace cada vez mayor.



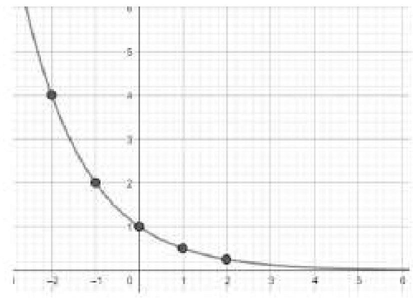
EJEMPLO: Representa gráficamente las siguientes funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

Para realizar el gráfico completamos una tabla de valores y los representamos en un sistema de cartesiano.

x	$y = 2^x$
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4



X	$y = (\frac{1}{2})^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25



Analizando las gráficas anteriores podemos observar que en la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$:

- el dominio es el conjunto de todos los números reales (**Dom = R**).
- la imagen es el conjunto de los números reales positivos (**Im = R^+**)
- Corta al eje y en el punto (0 ; 1)
- No tiene ceros o raíces.
- $C_+ = R$ y $C_- = \emptyset$
- Si a> 1, la función es estrictamente creciente.
- Si 0 < a < 1, la función es estrictamente decreciente.
- Tiene como asíntota horizontal a y = 0 (eje x) (**AH: y = 0**)
- No tiene asíntota vertical.

A continuación veremos un ejemplo para obtener la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^x}$ dados elementos de la misma.

EJEMPLO: Encuentra la fórmula de la función exponencial que corta al eje de las ordenadas en y = -2 y pasa por el punto $(-1 ; -\frac{2}{e})$

- Si *corta al eje de las ordenadas en y = -2*, significa que pasa por el punto (0 ; -2)
- Sabemos que pasa por el punto $(-1 ; -\frac{2}{e})$

Si tenemos dos puntos podemos reemplazar en la fórmula y nos quedaría:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Para } (0 ; -2) & \rightarrow & -2 = k \cdot a^0 \\ \text{Para } (-1 ; -\frac{2}{e}) & \rightarrow & -\frac{2}{e} = k \cdot a^{-1} \end{array}\right] \text{ Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.}$$

Para resolverlo podemos despejar de la primera ecuación: $-2 = k \cdot a^0 \Rightarrow \mathbf{k = -2}$

Reemplazamos en la otra ecuación: $-\frac{2}{e} = \mathbf{k} \cdot a^{-1} \Rightarrow -\frac{2}{e} = \mathbf{-2} \cdot a^{-1}$ y despejamos *a*:

$-\frac{2}{e} = -2 \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow -\frac{2}{e} = -\frac{2}{a} \Rightarrow \boldsymbol{a = e}$

La función quedaría: $\mathbf{f(x) = -2 \cdot e^x}$

APLICACIONES

EJEMPLO: Se determinó que la población de cierta nación en desarrollo está dada por medio de la fórmula $\boldsymbol{P = 15 \cdot e^{0,02t}}$, donde t es el número de años medidos a partir de 1980 y P el número de habitantes en millones. Determine la población en el año 2000 y la población proyectada en el 2025, suponiendo que esta fórmula continúa cumpliéndose hasta entonces.

Solución: En el **2000**, $t = 20$ (tiempo transcurrido desde el año 1980). Reemplazando quedaría:
$P = 15 \cdot e^{0,02 \cdot 20} = 15 \cdot e^{0,4} = 15 \cdot 1,4918 = 22,4$ (con un decimal)

En el año **2000**, la población fue de **22,4 millones.**

Después de **25 años** más, $t = 45$ y así $P = 15 \cdot e^{0,02 \cdot 45} = 15 \cdot e^{0,9} = 15 \cdot 2,2255 = 36,9$ (con un decimal)

La población proyectada para el **2025** será de **36,9 millones**

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función f: $R \to R^+$ tal que $f(x) = a^x$, con $a \in R^+ - \{1\}$, es una función ***biyectiva*** y existe su función inversa.
Aclaración: En este curso no analizaremos la biyectividad de las funciones.

Para obtener la inversa de una función $f(x)$ procedemos así,

1. Escribimos y = f (x). $\quad y = a^x$
2. Despejamos x de esta ecuación en términos de y (si es posible). $\quad x = \log_a y$
3. Intercambiamos x e y. La ecuación resultante es y $f^{-1}(x)$. $\quad \boldsymbol{y = \log_a x}$

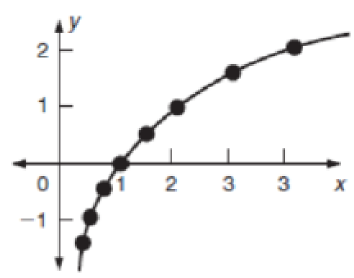
La expresión obtenida $\boldsymbol{y = \log_a x}$ recibe el nombre de función logarítmica.

Definimos ***función logarítmica*** como toda función f: $R^+ \to R$ tal que $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ donde $a \in \boldsymbol{R^+ - \{1\}}$

EJEMPLO: Construye la gráfica de la función logaritmo de base 2.

Usemos x como la variable independiente y escribimos $\boldsymbol{y = \log_2 x}$
Aplicando la definición, esto es lo mismo que $\boldsymbol{x = 2^y}$
Completamos la tabla en la que damos una serie de valores de ¨y¨ y calculamos los valores correspondientes de ¨x¨.

Y	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
X	0,25	0,354	0,5	0,707	1	1,414	2	2,828	4	8



En el gráfico están representados los puntos de la tabla. Están unidos por medio de una curva suave.

Observamos que el eje x está dibujado de manera horizontal ya que cuando escribimos $y = \log_2 x$, estamos considerando que x es la variable independiente.

El **dominio** de esta función es el conjunto de los números positivos y su **imagen** es el conjunto de todos los números reales. Esto es cierto para $y = \log_a x$ con cualquier base a.

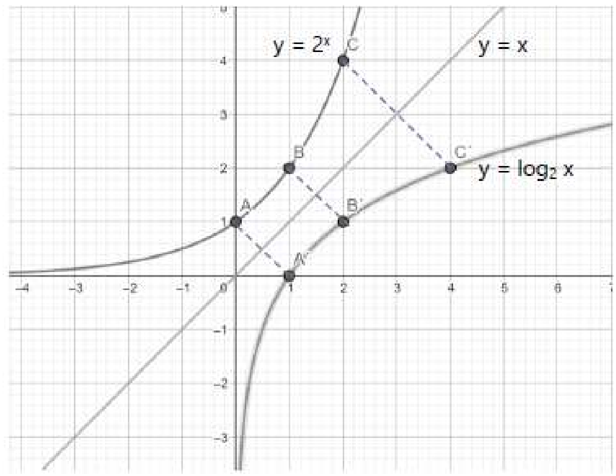
Analicemos los gráficos de las funciones $y = 2^x$ e $y = log_2\, x$

Completando las tablas obtenemos:

x	$y = 2^x$
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4

x	$y = \log_2 x$
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2

Representamos en un mismo sistema de coordenadas y observamos que los gráficos son simétricos respecto de la recta y = x.



Las funciones $y = 2^x$ e $y = log_2\, x$ son *inversas* y son *simétricas* respecto de la recta y = x.

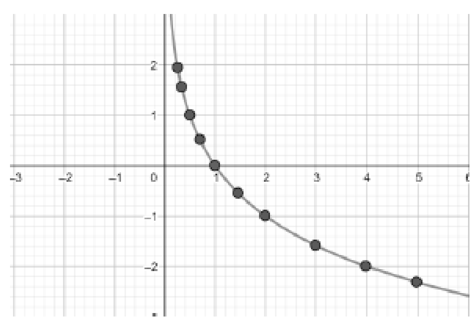
MÁS GRÁFICOS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

EJEMPLO: Construye la gráfica de $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Completamos la tabla dándole valores a ¨*y*¨ y calculamos los valores correspondientes de *x*.

y	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
x	4	2,828	2	1,414	1	0,707	0,5	0,354	0,25	0,125

Llevamos los puntos a un sistema de ejes cartesianos y obtenemos el siguiente gráfico:



De los gráficos realizados podemos observar que:

- Todas las funciones de la forma ***f(x) = log$_a$ x*** pasan por el punto ***(1 ; 0).***
- Si **a > 1** , los valores de f(x) aumentan al aumentar x, entonces f(x) es ***creciente***
- Si **0 < a < 1** , los valores de f(x) disminuyen al aumentar x, entonces f(x) es ***decreciente***
- ***Dom f = R^+ ; Im f = R***
- **x = 0** es ***asíntota vertical*** de f(x).

DOMINIO DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

EJEMPLO: Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) f(x) = log (1 – x^2)

El argumento de la función debe ser positivo, es decir: $\mathbf{1 - x^2 > 0}$
despejando x obtenemos: $1 - x^2 > 0 \Rightarrow 1 > x^2 \Rightarrow 1 > |x| \Rightarrow -1 < x < 1$ **Dom f = (-1 ; 1)**

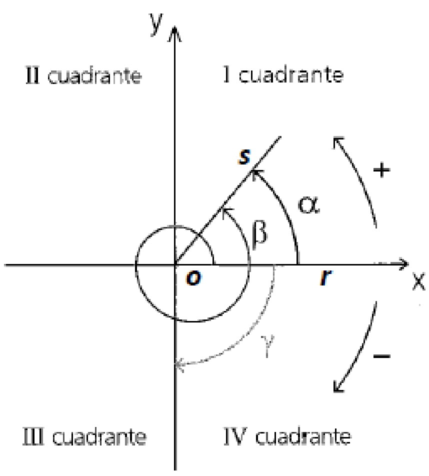
b) f(x) = log$_x$ (x – 4)

El argumento de la función debe ser positivo, es decir: $\mathbf{x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4}$
Y la base debe ser positivo y distinto de 1, es decir: $\mathbf{x > 0}$ **y** $\mathbf{x \neq 1}$
De las tres condiciones obtenemos que **Dom f = (4 ; +∞)**

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

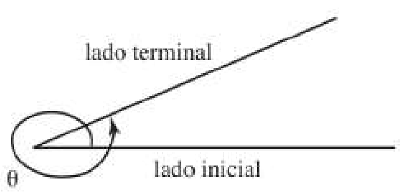
ÁNGULOS ORIENTADOS

Consideremos en el plano un punto ***o*** y dos semirrectas con origen en dicho punto ($\vec{or}$ y $\vec{os}$), llamamos ángulo orientado ***ros*** (α) al ángulo generado por la rotación, en sentido contrario a las agujas del reloj, de la semirecta $\vec{or}$ hacia la posición de la semirrecta $\vec{os}$.

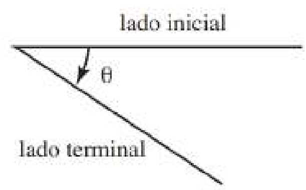


α es un ángulo positivo

γ es un ángulo negativo, está generado en el sentido de las agujas del reloj



θ es positivo



θ es negativo

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Para medir ángulos se pueden utilizar tres sistemas: sexagesimal, radial o circular y centesimal. Los más utilizados, son los dos primeros.

SISTEMA SEXAGESIMAL

En este sistema, la unidad de medida es el grado sexagesimal, que se define como la noventa-ava parte de un ángulo recto.

$$1° = \frac{1R}{90} \quad \Rightarrow \quad 1\ R = 90°$$

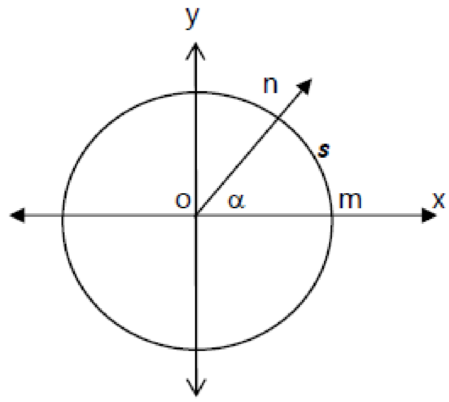
Un ángulo recto mide 90°, un ángulo llano 180° y un giro 360°.

SISTEMA CIRCULAR

En general, la ***medida de un ángulo*** se obtiene:

$$\text{med } \alpha = \frac{\text{long arco}}{\text{long radio}} = \frac{\hat{s}}{\overline{om}}$$

med $\alpha \in$ IR



En el ***sistema circular***, la unidad de medida es el ***radián***, que se define como la medida del ángulo central α que abarca un arco que es igual al radio de la circunferencia.

Si $\overline{om} = \hat{s} \Rightarrow \text{med } \alpha = 1$ radián

- Un radián es el ángulo cuyo arco mide lo mismo que el radio de la circunferencia.

Calculemos la medida de un ángulo de un giro α (α = 360º), en el sistema circular:

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{radio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \quad \text{(en radianes)}$$

Observación: La circunferencia de ese círculo mide 2∏ radianes, por lo cual deducimos que a 180º le corresponden ∏ radianes

REGLAS DE CONVERSIÓN

Observemos que:

360º $\longrightarrow$ 2π radianes (1 giro)

180º $\longrightarrow$ π radianes ($\frac{1}{2}$ giro)

1º $\longrightarrow$ $\frac{\pi}{180}$ radianes

$$\boxed{x^{\circ} \longrightarrow \frac{\pi}{180} \cdot x \quad \textbf{radianes}}$$

- Para pasar de grados a radianes, un ángulo de x grados mide $x \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes
- Para pasar de grados a radianes, un ángulo de x grados mide $x \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes

EJEMPLOS: Expresa 50º y 112º 24´ en radianes

50º $\longrightarrow$ $50 \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes = $\frac{2 \cdot \pi}{9}$ radianes = $\frac{2}{9}\pi$ radianes

112º 24´= 112º,4 $\longrightarrow$ $112{,}4 \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes = 1,96 radianes

- Para pasar de radianes a grados, un ángulo de x radianes mide $x \cdot \frac{180}{\pi}$ radianes

EJEMPLOS: Expresa $\frac{\pi}{4}$ radianes y 1 radián en el sistema sexagesimal.

$$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\cancel{\pi}}{4} \cdot \frac{180}{\cancel{\pi}} = 45°$$

$$1 \text{ radián} \longrightarrow 1 \cdot \frac{180}{\pi} = 57°,2957795... = 57°\ 17'\ 45''$$

EQUIVALENCIAS ENTRE LOS SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

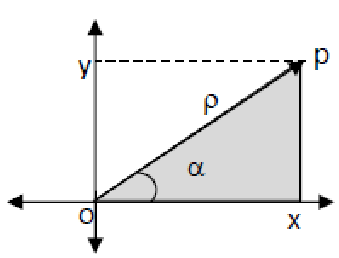
	Sexagesimal	*Circular*
1 giro	360°	2π rad
1 llano	180°	π rad
1 recto	90°	$\frac{\pi}{2}$ rad

Aplicando los pasajes anteriores podemos obtener la siguiente tabla, que muestra las medidas en radianes y grados de algunos ángulos especiales.

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Si consideramos en el plano cartesiano el punto **p = (x ; y)** (distinto del origen) y el vector $\vec{op}$, queda determinado un ángulo **α** con el semieje positivo de las abscisas ($\overrightarrow{ox^+}$).



p = (x ; y), x: abscisa de p , y: ordenada de p

α es el ángulo

ρ: medida del radio vector

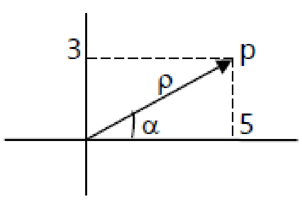
Por Teorema de Pitágoras obtenemos que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $\rho > 0$

Observando el dibujo podemos definir las siguientes razones entre x , y , ρ:

- seno de $\alpha = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{\rho}$
- coseno de $\alpha = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}}$ $\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{x}{\rho}$
- tangente de $\alpha = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$; $x \neq 0$
- cotangente de $\alpha = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{x}{y}$; $y \neq 0$
- secante de $\alpha = \dfrac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}}$ $\quad$ $\sec\alpha = \dfrac{\rho}{x}$; $x \neq 0$
- cosecante de $\alpha = \dfrac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\rho}{y}$; $y \neq 0$

ACLARACIÓN: *Los signos de las coordenadas x e y del punto proporcionan el signo de las razones trigonométricas.*

EJEMPLO: Halla las razones trigonométricas para el ángulo α cuyo lado terminal tiene el punto (5;3).



Representamos el punto p = (5;3) en un sistema de ejes cartesianos.

x = 5 e y = 3 , reemplazamos y calculamos el valor de ρ.

$$\rho = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{\mathbf{34}}$$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ * $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{34}}{3}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$ * $\qquad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{5}{3}$ $\qquad$ $\sec\alpha = \frac{\sqrt{34}}{5}$

*En el cálculo del seno y el coseno del ángulo racionalizamos el denominador.

RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

Las siguientes identidades son muy útiles en el cálculo y se usan con mucha frecuencia.

- ***RELACIÓN PITAGÓRICA:*** $\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$

  Despejando obtenemos: $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ y $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

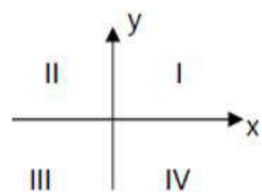
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$; $\cos\alpha \neq 0$ $\qquad$ y $\qquad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$; $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ con $\cos\alpha \neq 0$; $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ con $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ y $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ con $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$

CUADRANTES Y SIGNOS

Los ejes x e y dividen al plano cartesiano en cuatro regiones llamadas ***cuadrantes.*** Observemos los signos de las coordenadas en cada uno de ellos.

I cuadrante:	$x>0$, $y>0$
II cuadrante:	$x<0$, $y>0$
III cuadrante:	$x<0$, $y<0$
IV cuadrante:	$x>0$, $y<0$

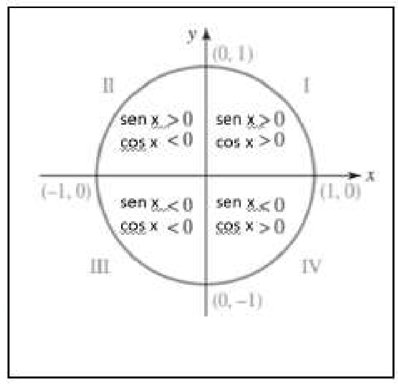


CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA Y SIGNOS

Es aquella que tiene centro en el origen de coordenadas y como radio la unidad.

Las razones trigonométricas dependen de la amplitud de cada ángulo, es decir, se definen en función de ellos.

Los signos de las restantes razones los podemos obtener mediante la aplicación de las relaciones fundamentales vistas anteriormente.



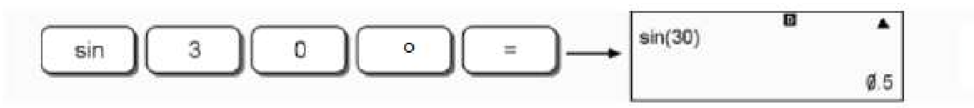
USO DE LA CALCULADORA PARA APROXIMAR EL VALOR DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Debemos fijarnos en el modo de la unidad angular en la que estés trabajando. Generalmente, la unidad por omisión es el grado sexagesimal.

Podemos comprobarlo en la pantalla de la calculadora que aparezca la letra D o DEG. En caso contrario pulsamos la secuencia de teclas SHIFT MODE y elegimos DEG para trabajar con grados sexagesimales.

- Para calcular las ***razones trigonométricas*** de un ángulo agudo, pulsa la tecla correspondiente SIN COS TAN y después el valor del ángulo.

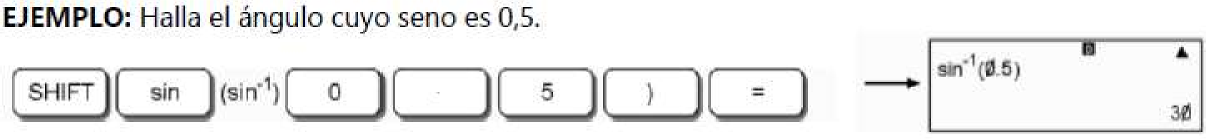
EJEMPLO: Halla el valor de sen 30º.



sen 30º = 0,5

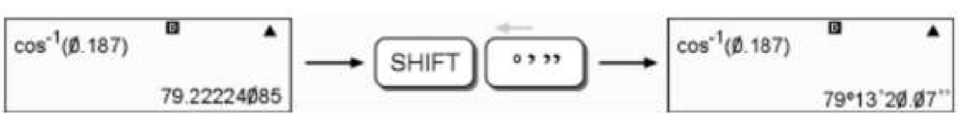
Si sabemos el valor de una razón trigonométrica y queremos averiguar el ángulo, usaremos las funciones inversas con ayuda de la tecla SHIFT (en algunas calculadoras es INV).'

EJEMPLO: Halla el ángulo cuyo seno es 0,5.



arc sen 0,5 = 30º (se lee ángulo cuyo seno es 0,5)

EJEMPLO: Halla el ángulo cuyo coseno es 0,187



En pantalla aparece el número 79.22224085. El resultado es en grados decimales. Para expresarlo en el sistema sexagesimal pulsamos la tecla de conversión.

arc cos 0,187 = 79º 13′ 20″

De la misma forma, si queremos introducir un ángulo dado en grados sexagesimales usamos la misma tecla para introducir los grados, minutos y segundos.

EJEMPLO: Halla la tangente de 63º 34′ 18″

= 2,011988117

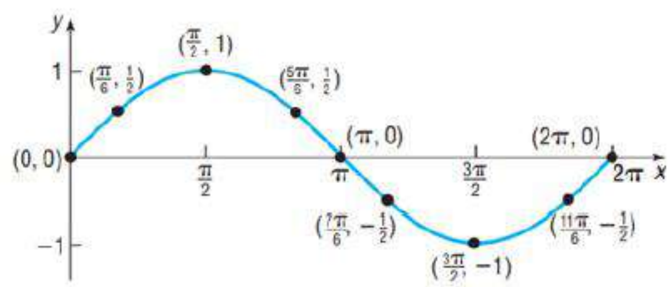
tg 63º 34′ 18″ = 2,011988117

GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

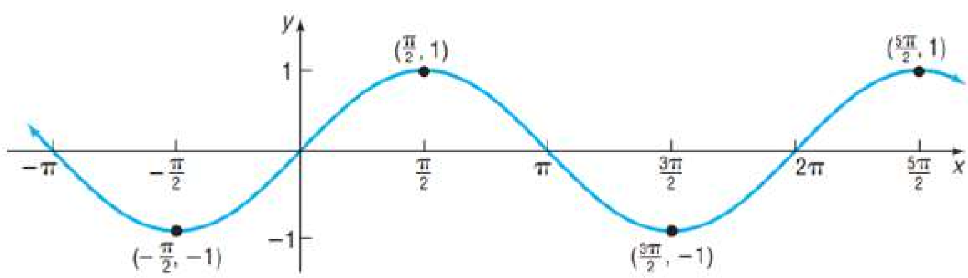
FUNCIÓN SENO: y = sen x

La función seno tiene período 2π, graficaremos sólo en el intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$. El resto de la gráfica consistirá en repeticiones de esta parte de la gráfica.

x	$y = \text{sen } x$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
π	0	$(\pi, 0)$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
2π	0	$(2\pi, 0)$



La gráfica anterior es un período, o ciclo, de la gráfica de y = sen x. Para obtener una gráfica completa, repetimos este ciclo en cada dirección.



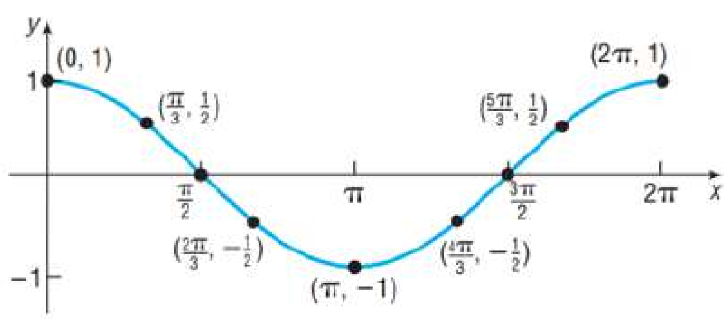
Características:

- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- La imagen toma los valores entre -1 y 1, inclusive.
- Es periódica, con período 2π.
- Las intersecciones con el eje de las x son: ..., -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ...
- La intersección con el eje de las y es 0.
- El valor máximo es 1 y ocurre en x = ... , $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$, ... ;
  el valor mínimo es -1 y ocurre en x = ... , $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$, ...

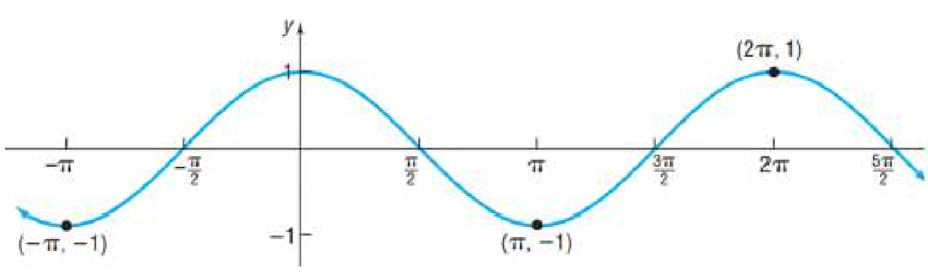
FUNCIÓN COSENO: y = cos x

La función coseno tiene período 2π, graficaremos sólo en el intervalo $[0 , 2\pi]$. El resto de la gráfica consistirá en repeticiones de esta parte de la gráfica.

x	$y = \cos x$	(x, y)
0	1	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
π	-1	$(\pi, -1)$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$
2π	1	$(2\pi, 1)$



Una gráfica más completa de y = cos x se obtiene repitiendo este período en las dos direcciones.



Características:

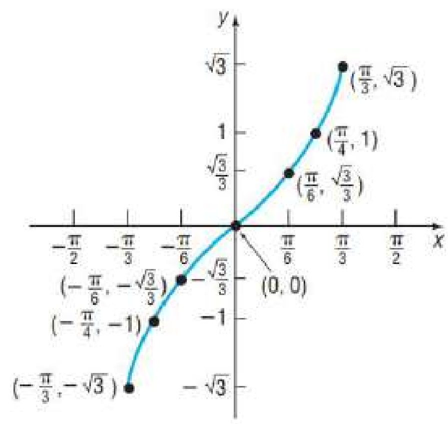
- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- La imagen toma los valores entre -1 y 1, inclusive.
- Es periódica, con período 2π.
- Las intersecciones con el eje de las x son: ... , $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, ... ;
- La intersección con el eje de las y es 1.
- El valor máximo es 1 y ocurre en x = ..., -2π, 0, 2π, 4π, 6π, ...
  el valor mínimo es -1 y ocurre en x = ..., $-\pi$, π, 3π, 5π, ...

FUNCIÓN TANGENTE: y = tg x

Debido a que la función tangente tiene período π, solo es necesario determinar la gráfica en un intervalo de longitud π. El resto de la gráfica consiste en repeticiones.

Como la función tangente no está definida en ..., $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, ..., concentraremos la atención en el intervalo $(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2})$, de longitud π, realizamos una tabla de valores y graficamos.

x	$y = \tan x$	(x, y)
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \approx -1.73$	$\left(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$
$-\frac{\pi}{4}$	-1	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.58$	$\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
0	0	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	1	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1.73$	$\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$



Para completar un período de la gráfica, podemos investigar el comportamiento de la función cuando x se acerca a $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. La función tangente no está definida para esos valores. Para determinar el comportamiento usamos la identidad $tg\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$.

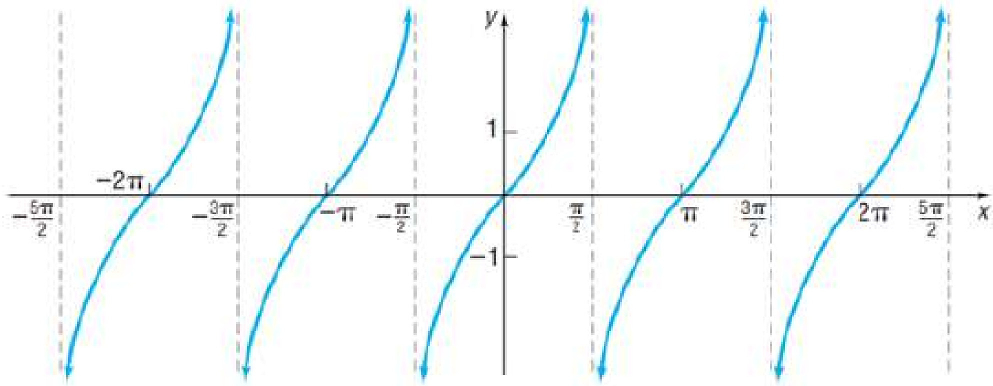
Observando la siguiente tabla podemos ver que:

- Si x se acerca a $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$, es menor que $\frac{\pi}{2}$ y sen x es cercano a 1 y cos x es positivo y cercano a 0. Entonces, la razón $\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ sería un valor positivo y grande. De hecho, cuanto más cerca está x de $\frac{\pi}{2}$, sen x se acerca más a 1 y cos x a 0, de manera que tg x tiende a ∞. Es decir, la recta vertical x = $\frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical de la función y = tg x

x	sen x	cos x	$y = \tan x$
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \approx 1.73$
1.5	0.9975	0.0707	14.1
1.57	0.9999	$7.96E^{-4}$	1255.8
1.5707	0.9999	$9.6E^{-5}$	10381
$\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$	1	0	No definida

- Si x se acerca a $-\frac{\pi}{2}$ es y es mayor que $-\frac{\pi}{2}$ y sen x es cercano a -1 y cos x es positivo y cercano a 0. Entonces, la razón $\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ tiende a $-\infty$. Es decir, la recta vertical x = $-\frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical de la función y = tg x.

Con estas observaciones completamos un período de la gráfica. Podemos obtener la gráfica completa de y = tg x repitiendo ese período.



Características:

- El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
- La imagen es el conjunto de todos los números reales.
- Es periódica, con período π.
- Las intersecciones con el eje de las x son: ..., -2π, -π, 0, π, 2π, 3π, ...
- La intersección con el eje de las y es 0.
- Las asíntotas verticales ocurren en x = ... , $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ...

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

La siguiente tabla permite encontrar los valores exactos de las razones trigonométricas sin necesidad de usar la calculadora.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---
cotg α	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cosec α	---	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
sec α	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	---

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una ***identidad trigonométrica*** es una igualdad que se verifica para cualquier valor de los ángulos que intervienen en ella.

No siempre las identidades se verifican para todo $x \in R$, es necesario analizar su dominio para hacer las restricciones correspondientes.

Para demostrar la validez de una identidad, partimos de uno de los miembros de la ¨supuesta¨ igualdad, aplicamos propiedades y relaciones que sean necesarias y obtenemos el otro miembro.

EJEMPLO: Verifica que **$\cos x\ (\sec x - \cos x) = \text{sen}^2 x$**

Vamos a trabajar con el primer miembro:

$\cos x \,.\, (\sec x - \cos x)$ $= \cos x \,.\, \sec x - \cos^2 x$, aplicamos propiedad distributiva

$\cos x \,.\, (\sec x - \cos x) = \cos x \,.\, \frac{1}{\cos x} - \cos^2 x$, reemplazamos *sec x* por su equivalente

$\cos x \,.\, (\sec x - \cos x) = 1 - \cos^2 x$, simplificamos y operamos

$\cos x \,.\, (\sec x - \cos x) =$ **$\text{sen}^2 x$** reemplazamos por su equivalente y obtuvimos el segundo miembro.

Analicemos el dominio de validez de la identidad: Intervienen las razones, cos x y sec x.

- cos x está definida para todos los reales.
- sec x está definida para los x donde el $\cos x \neq 0$

por lo tanto, el **dominio de validez** de la Identidad es **$R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, k \in Z\}$**