FACES, año 6, n° 7, enero/abril de 2000; págs. 117-126

Duración: un concepto de la matemática financiera

Duration: a Financial Mathematics' concept

Germán Blanco*
Gustavo Adrián José*

RESUMEN / SUMMARY

El objetivo planteado es el desarrollo del concepto de la duración como herramienta analítica aplicable en el campo de la matemática financiera y, en particular, al capítulo de los sistemas de reembolso de préstamos.

La duración es generalmente utilizada en el análisis de títulos de renta fija, toda vez que determina un coeficiente que indica los períodos en que se "recupera" una inversión, ponderando el peso relativo de cada pago por el valor actual del bono, según el período en que éste es percibido. Utilizando este coeficiente es posible, adicionalmente, analizar cómo afecta al valor del bono pequeños cambios en la tasa de interés.

A partir de lo anterior, intentamos extender su aplicación al ámbito del sistema francés de reembolso de préstamos, como una aproximación a la flexibilización del supuesto de permanencia de la tasa de interés.

The aim of the present paper is the development of the concept of duration as an analytical tool applicable to the Financial Mathematics area and, particularly, to the chapter of the loans reimbursement systems.

Duration is frequently used in the analysis of fixed rent titles; whenever it determines a coefficient which indicates the periods in which an investment is «recuperated» pondering the relative weight of each payment by the bond 's current value, in accordance with the period in which it is perceived. Using this coefficient it is possible, further, to analyze how small changes in the interest rate affect the bond 's value.

Starting from the above mentioned, we attempt to extend its application to the scope of the loans reimbursement French system, as an approximation to the flexibility in the supposition of the interest rate 's stay.

PALABRAS CLAVE / KEY WORDS

Duración - Cambios en la tasa de interés - Sistema francés.

Duration - Changes in the interest rate - French system.

* Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, UNMDP.

1. Introducción

1.1. Tema. Finalidad

Este trabajo tiene como finalidad la utilización de un concepto propio de la evaluación de títulos de renta fija —tal como lo es "*duration*"— dentro del análisis de los sistemas de reembolso de préstamos.

El enfoque está dirigido al sistema francés de reembolso y a las variaciones del valor actual del préstamo al introducir cambios en la tasa de interés.

1.2. Origen del planteo

A partir del trabajo presentado por el Cpn Aldo Pittaluga referido a la aplicación del concepto de duración en el reembolso de títulos públicos, intentaremos extender su aplicación a otro de los temas centrales de la asignatura de Matemática Financiera, los sistemas de reembolso de préstamos y específicamente al sistema francés.

Cabe destacar, además, su uso como herramienta de evaluación de la volatilidad de bonos de renta fija, y como método alternativo de evaluación de proyectos de inversión.

2. Desarrollo teórico

2.1. Generalidades

El reembolso de préstamos surge como consecuencia de la concertación de un contrato de mutuo oneroso, en el cual una de las partes entrega a la otra una suma de dinero y ésta se compromete a devolver con más los intereses pactados en un determinado período de tiempo.

Existen diversos sistemas de reembolso de préstamos que aseguran la igualdad entre las prestaciones de ambas partes: pago único, con o sin pago periódico de intereses, francés, alemán y americano. Todos ellos aseguran que se cumpla en cualquier momento "n" del tiempo la siguiente condición de equivalencia:

$$\sum V \cdot (1+i)^{-t} = \sum C \cdot (1+i)^{-t}$$

donde: V: valor de las prestaciones del acreedor,

C: valor de las prestaciones del deudor,

i: tasa efectiva de interés,

t: número de período;

de modo tal que el valor actual del desembolso realizado por el acreedor sea igual al valor actual de las "n" cuotas abonadas por el deudor.

Cabe destacar que tal equivalencia de condiciones presupone la existencia y permanencia de ciertos supuestos, a saber:

- inexistencia de inflación;
- inexistencia de riesgo de incobrabilidad;
- permanencia de la tasa de interés;
- capitalización a interés compuesto.

Por tanto, modificaciones de tales supuestos, como la existencia de inflación, incobrabilidades o variaciones en la tasa de interés, manteniéndose constante el valor de las cuotas y el número de períodos, inclinarán la "balanza de la equivalencia" a favor del deudor o acreedor.

En este trabajo intentaremos determinar cómo y cuánto se modifica tal requisito de equivalencia ante cambios en la tasa de interés, específicamente dentro del sistema francés de reembolso, para lo cual se hace necesario y útil la introducción del concepto de duración.

2.2. DURACIÓN

Uno de los elementos característicos de la forma, cantidad y tiempo de devolución de un préstamo es el número de períodos durante los cuales el prestatario asume la obligación de pagar las cuotas.

Dado que el valor del préstamo es el valor actual de las "n" cuotas descontadas a la tasa de interés pactada, cada cuota tendrá una importancia relativa diferente en la conformación de dicho valor actual, en función del período en que se efectúe. En consecuencia, aun cuando dentro del sistema francés las cuotas son nominalmente iguales, el valor actual de la primera cuota será mayor al de la última.

El concepto que refleja tal idea, dentro del ámbito del análisis del manejo de carteras de activos de renta fija, es el de DURACIÓN. En efecto, la duración de un bono tiene en cuenta la importancia que cada pago tiene en el valor del bono , siendo éste el valor actual de los "n" cupones del bono. Así, la importancia de cada pago será igual a su valor presente ponderado por el valor del bono. La fórmula de Macaulay para obtener la duración de un bono es la siguiente:

$$D = \sum_{t=1}^{n} t \frac{Cf\,(1+i)^{-t}}{P}$$

donde: D: duración del bono,
t: número de período,
i: tasa efectiva del período,
Cf: valor del cupón recibido por el inversor en el período t,
P: valor del bono.

Dado que el valor del bono es igual al valor actual de los "n" pagos que recibirá, aquél es función de la tasa de interés utilizada para encontrar dicho valor actual. Por lo tanto, si el valor de un bono para un número "n" de períodos y una tasa i1 es:

$$P_{i1} = \sum Cf\,(1+i)^{-t} \qquad (1)$$

donde: Cf : valor de cada pago del bono,
Pi1: precio del bono para la tasa de interés 1.

Si la tasa varía en una determinada cuantía "h", la variación en el precio del bono será:

$$\Delta P = P_{(i1+h)} - P_{(i1)} \qquad (2)$$

Y en forma aproximada tal variación será:

$$\Delta P = h \cdot P'_{(i1)} \qquad (3)$$

donde P´(i1) es la derivada primera del precio del bono.

Si la variación relativa es:

$$\Delta P / P = \frac{P_{(i1+h)} - P_{(i1)}}{P_{(i1)}} \qquad (4)$$

reemplazando en el numerador (2) por (3), la variación relativa será en forma aproximada:

$$\Delta P / P = h \frac{P'_{(i1)}}{P_{(i1)}} \qquad (5)$$

Siendo la derivada de (1) igual a:

$$P'_{(i1)} = \sum Cf\,(-t)(1+i)^{-t+1}$$

Reemplazando en (5),

$$\Delta P / P = -h \frac{\sum t \cdot Cf\,(1+i)^{-t}}{P_{(i1)}} \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

Así, arribamos a la expresión que nos permite calcular la variación aproximada del valor del bono ante cambios en la tasa de interés:

$$\Delta P / P = \frac{-h \cdot D}{(1+i_1)} \qquad (6)$$

Y si designamos como duración modificada (DM) a D/ (1+i)

$$\Delta P / P = -h \cdot DM$$

Cabe consignar que la duración modificada es una aproximación del cambio en el precio del bono ante variaciones pequeñas en la tasa de interés, porque es la derivada primera del valor actual en función de la tasa de interés.

2.3. La duración en el sistema francés

A partir del desarrollo anterior, es posible derivar su aplicación en el sistema francés. Siendo la cuota en el sistema francés constante e igual a:

$$C = \frac{V_n}{a_{\overline{n}|i}}$$

donde: Vn: valor actual del préstamo

$a_{\overline{n}|i}$: valor actual de una renta unitaria de "n" períodos a la tasa de interés i.

Reemplazando en la fórmula de duración,

$$D = \frac{\sum t \cdot C_n \cdot (1+i)^{-t}}{V_n}$$

Dado que el Vn es igual a C . $a_{\overline{n}|i}$ y que las cuotas son constantes,

$$D = \frac{C \cdot \sum t \cdot (1+i)^{-t}}{C \cdot a_{\overline{n}|i}}$$

Simplificando C, resolviendo la sumatoria del denominador y reemplazando $a_{\overline{n}|i}$ por su equivalente, obtenemos:

$$D = \frac{i}{1+i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}$$

De tal forma puede obtenerse el valor de la duración de un préstamo otorgado por el sistema francés conociendo -por supuesto- el número "n" de períodos y la tasa de interés pactada.

Se deduce, entonces, que puede utilizarse dicha fórmula para conocer la "duración", luego de transcurridos "k" períodos y reemplazando "n" por "n-k" períodos. La finalidad de la fórmula modificada será, a partir de la relación (6), conocer en cuánto se modifica aproximadamente el valor actual del saldo a pagar, indicando el valor máximo que el acreedor podría ofrecer descontar al deudor en el momento "k" si cancelara el saldo, de manera de no sufrir perjuicio alguno dada la nueva tasa de interés.

3. Desarrollo práctico

Supongamos, para analizar un caso práctico, un préstamo de $ 1.000.000, reembolsable a 10 años, con una tasa del 10% efectiva anual, por el sistema francés.

Siendo la cuota equivalente a:

$$C = \frac{1.000.000}{a_{\overline{10}|0.1}}$$

obtenemos el siguiente cuadro de amortización:

t	1. SALDO	2. CUOTA	3. INTERÉS	4. CAPITAL	5. VA CUOTA	6. VA / Vn x t
1	1000000,0	162745,39	100000,00	62745,39	147950,35	0,1479503
2	937254,61	162745,39	93725,46	69019,93	134500,32	0,2690006
3	868234,68	162745,39	86823,47	75921,92	122273,02	0,3668190
4	792312,76	162745,39	79231,28	83514,11	111157,29	0,4446291
5	708798,65	162745,39	70879,86	91865,53	101052,08	0,5052604
6	616933,12	162745,39	61693,31	101052,08	91865,530	0,5511931
7	515881,04	162745,39	51588,10	111157,29	83514,118	0,5845988
8	404723,76	162745,39	40472,38	122273,01	75921,926	0,6073754
9	282450,74	162745,39	28245,07	134500,32	69019,932	0,6211793
10	147950,43	162745,39	14795,04	147950,35	62745,393	0,6274539
					V_n=1000000	D=4,72546

Puede observarse que:

* la sumatoria de los valores de la columna 6 permite obtener el valor de la duración para este caso concreto. En efecto: surge de sumar los sucesivos valores actuales de cada cuota descontados a la tasa vigente, multiplicados por el número de período en que se perciben y ponderados por el valor actual del préstamo;

* el valor anterior equivale al que surge de la fórmula derivada, esto es:

$$\frac{i}{1+i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}=\frac{0{,}1}{1{,}1}-\frac{10}{(1{,}1)^{10}-1}=4{,}72546$$

* a partir de ese valor de la duración pueden hacerse las siguientes consideraciones:

1. Si en el momento 0 se produjera una modificación en la tasa de interés del 1%, el valor actual del préstamo se modificaría conforme a la ecuación (6) en:

$$\Delta V/V=\frac{-D}{(1+i)}\cdot\Delta i=\frac{-4{,}72546}{1{,}1}\cdot 0{,}01=0{,}0429587=4{,}29587\,\%$$

Según la fórmula anterior, el nuevo valor actual es un 4, 29% menor, es decir, el 95,71% del original.

Puede verificarse que el valor actual de 10 cuotas iguales de \$162.745,39 (cuota original) descontadas a una tasa del 11% (nueva tasa) es igual a:

$$C\cdot a_{\overline{n}|\,i} = \$162.745{,}39\ .\ 5{,}9046 = \$\ 960.946{,}57$$

esto es un 96,09% del valor actual original.

Esta diferencia entre los resultados puede explicarse a partir de que la duración modificada es la derivada primera del valor actual, y como tal determina variaciones en éste ante variaciones en la tasa de interés, cuando esas variaciones tienden a cero. Por tanto, su resultado es una aproximación al valor actual ante modificaciones en la tasa, que mejora cuando menores sean las variaciones en la tasa.

2. Si habiendo transcurrido "k" períodos, se modificara la tasa, podríamos utilizar las fórmulas anteriores para determinar en cuánto se modificará el saldo restante. Así en lugar de "n" en la fórmula, sustituiremos por "n-k" y el valor resultante nos dirá cuál será la "duración" del saldo al momento "k".

Si suponemos, adicionalmente, que en el momento original el préstamo se realizó a la tasa de mercado del 10%, y en el momento 6 la tasa de mercado se modificó en 1% y se había pactado la no variabilidad de las cuotas, es posible calcular aproximadamente la pérdida que sufrirá el acreedor (ganancia del deudor) o, de otro punto de vista, el máximo descuento que podría ofrecérsele al deudor si cancelara el saldo restante en el momento 6, para mantenerse indiferente entre recibir el saldo o esperar las respectivas cuotas.

Así la "duración" en el momento 6 será:

$$"D"=\frac{1{,}10}{0{,}1}-\frac{4}{(1{,}10)^4-1}=2{,}38116$$

Por lo tanto la variación del saldo es:

$$\Delta V/V = -2{,}38116/1{,}10\cdot 0{,}01 = 0{,}021646$$

Esto es una variación aproximada del 2,16%. Si según el cuadro el saldo al momento 6 es de \$616.933.- el descuento máximo aproximado que podría ofrecérsele al deudor si cancelara el saldo en ese momento sería de:

$$\$616.933\ .\ 0{,}0216 = \$13.354$$

de manera de serle indiferente ante las nuevas tasas de interés de mercado.

4. Conclusiones

En este trabajo —creemos— se ha logrado:

* desarrollar el concepto de duración;

* aplicar dicha herramienta al sistema francés de reembolso de préstamos;

* encontrar aplicaciones de la utilización de tal concepto para analizar cuál es la influencia de las posibles modificaciones en la tasa de interés;

* comprender la función que en la planilla de cálculo (Excel) se encuentra dentro del acápite de "Funciones Financieras" (ver descripción de la misma en los anexos al final del trabajo);

* poner de manifiesto las limitaciones de sus resultados.

Anexo

Duración

Devuelve la duración de Macaulay de un valor nominal supuesto de $100. La duración se define como el promedio ponderado del valor presente de los recursos generados y se usa como una medida de la respuesta del precio de un bono a los cambios en el rendimiento.

Si esta función no está disponible, ejecute el programa de instalación e instale las Herramientas para ánalisis. Para instalar este complemento, elija Complementos en el menú Herramientas y seleccione la casilla correspondiente.

¿Cómo hacerlo?

Sintaxis

DURACIÓN(liq; vencto; cupón; rendto; frec; base)

Liq es la fecha de liquidación del valor bursátil. La fecha de liquidación del valor bursátil es la fecha posterior a la de emisión cuando el comprador adquirió el valor bursátil.

Vencto es la fecha de vencimiento del valor bursátil. La fecha de vencimiento es cuando expira el valor bursátil.

Cupón es la tasa de interés nominal anual (interés en los cupones) de un valor bursátil.

Rendto es el rendimiento anual de un valor bursátil.

Frec es el número de cupones que se pagan por año. Para pagos anuales, frec = 1; para pagos semestrales = 2; para pagos trimestrales, frec = 4.

Base determina en qué tipo de base deben ser contados los días.

Base	*Base para contar días*
0 u omitida	US (NASD) 30/360
1	Actual/actual
2	Actual/360
3	Actual/365
4	Europea 30/360

Observaciones

* La fecha de liquidación es la fecha en que se compra el cupón, por ejemplo un bono. La fecha de vencimiento es la fecha en que expira el cupón. Por ejemplo, supongamos que se emite un bono a treinta años el 1 de enero de 1996 y, seis meses más tarde, es adquirido por un comprador. La fecha de emisión será 1 de enero de 1996, la fecha de liquidación será 1 de julio de 1996 y la fecha de vencimiento será 1 de enero del 2026, es decir, treinta años después del 1 de enero de 1996, la fecha de emisión.
* Los argumentos liq, vencto, frec y base se truncan a enteros.
* Si el argumento liq o vencto no es una fecha válida, DURACIÓN devuelve el valor de error #¡NUM!
* Si el argumento cupón < 0 ó si el argumento rendto < 0, DURACIÓN devuelve el valor de error #¡NUM!
* Si el argumento frec es un número distinto de 1, 2 ó 4, DURACIÓN devuelve el valor de error #¡NUM!
* Si el argumento base < 0 ó si base > 3, DURACIÓN devuelve el valor de error #¡NUM!
* Si el argumento liq ≥ vencto, DURACIÓN devuelve el valor de error #¡NUM!

Ejemplo

Un bono tiene los siguientes términos:

Fecha de liquidación: 1 de enero de 1986
Fecha de vencimiento: 1 de enero de 1994
Interés: 8,0 por ciento
Rendimiento: 9,0 por ciento
Frecuencia: Semestral
Base: Actual/actual

La duración (en el sistema de fecha 1900) es:
DURACIÓN ("1-1-86";"1-1-94";0,08;0,09;2;1) es igual a 5,993775

Duración.Modif

Devuelve la duración modificada de un valor bursátil con un valor nominal de $100.

Si esta función no está disponible, ejecute el programa de instalación e instale las Herramientas para ánalisis. Para instalar este complemento, elija Complementos en el menú Herramientas y seleccione la casilla correspondiente.

¿Cómo hacerlo?

Sintaxis

DURACIÓN.MODIF(liq; vencto; cupón; rendto; frec; base)

Liq es la fecha de liquidación del valor bursátil. La fecha de liquidación del valor bursátil es la fecha posterior a la de emisión cuando el comprador adquirió el valor bursátil.

Vencto es la fecha de vencimiento del valor bursátil. La fecha de vencimiento es cuando expira el valor bursátil.

Cupón es la tasa de interés nominal anual (interés en los cupones) de un valor bursátil.

Rendto es el rendimiento anual de un valor bursátil.

Frec es el número de cupones que se pagan por año. Para pagos anuales, frec = 1; para pagos semestrales = 2; para pagos trimestrales, frec = 4.

Base determina en qué tipo de base deben ser contados los días.

Base	Base para contar días
0 u omitida	US (NASD) 30/360
5	Actual/actual
6	Actual/360
7	Actual/365
8	Europea 30/360

Observaciones

* La fecha de liquidación es la fecha en que se compra el cupón, por ejemplo un bono. La fecha de vencimiento es la fecha en que expira el cupón. Por ejemplo, supongamos que se emite un bono a treinta años el 1 de enero de 1996 y, seis meses más tarde, es adquirido por un comprador. La fecha de emisión será 1 de enero de 1996, la fecha de liquidación será 1 de julio

de 1996 y la fecha de vencimiento será 1 de enero del 2026, es decir, treinta años después del 1 de enero de 1996, la fecha de emisión.

* Los argumentos liq, vencto, frec y base se truncan a enteros.

* Si el argumento liq o el argumento vencto no es una fecha válida, DURACIÓN.MODIF devuelve el valor de error #¡NUM!

* Si el argumento rendto < 0 ó si el argumento cupón < 0, DURACIÓN.MODIF devuelve el valor de error #¡NUM!

* Si el argumento frec es cualquier número distinto de 1, 2 ó 4, DURACIÓN.MODIF devuelve el valor de error #¡NUM!

* Si el argumento base < 0 ó si base > 3, DURACIÓN.MODIF devuelve el valor de error #¡NUM!

* Si el argumento liq ≥ vencto, DURACIÓN.MODIF devuelve el valor de error #¡NUM!

* La duración modificada se define como se indica a continuación:

Ejemplo

Un bono tiene los siguientes términos:

Fecha de liquidación: 1 de enero de 1986
Fecha de vencimiento: 1 de enero de 1994
Interés: 8,0 por ciento
Rendimiento: 9,0 por ciento
Frecuencia: Semestral
Base: Actual/actual

La duración modificada (en el sistema de fecha 1900) es:
DURACIÓN.MODIF ("1-1-86";"1-1-94";0,08;0,09;2;1) es igual a 5,73567

Bibliografía

Diez de Castro, Luis y Mascareñas, Juan (1994), *Ingeniería Financiera*, McGraw - Hill/ Interamericana de España S.A., Madrid.

Martínez Abascal, Eduardo (1993), *Futuros y Opciones en la gestión de carteras*, McGraw - Hill/Interamericana de España S.A., Madrid.

Mondino, Diana y Pendas, Eugenio (1994), *Finanzas para empresas competitivas*, Ediciones Granica S.A., Barcelona.

Pittaluga, Aldo José (1997), *El Precio de las obligaciones, duración, volatilidad: una aplicación de la Matemática financiera*, Mar del Plata, Septiembre.

Material didáctico elaborado por la cátedra de Matemática Financiera.

Al Dr. Paulino Eugenio Mallo y a sus colaboradores, nuestro más sincero agradecimiento.