INTRODUCCION A LA MATEMATICA BORROSA
Introducction to fuzzy mathematics

Grupo de investigación Matemática Borrosa.
Director: *Dr. Paulino E. Mallo*
Integrantes: *C.P. María A. Artola*
C.P. Mónica García
Sr. Fabián O. D'Amico
Sr. Julio J. Garrós
Sr. Diego Martínez
Sr. Mariano E. Pascual

RESUMEN

Si bien es cierto que el problema del tratamiento del riesgo se remonta a lo orígenes de la ciencia económica, es necesario reconocer que no acontece lo mismo con la incertidumbre.

Es por ello que el propósito del presente artículo es presentar los elementos básicos de la matemática borrosa y destacar la importancia de la aplicación de la misma en las disciplinas contables, económicas y administrativas, de forma tal que permita - a su vez - el cambio de paradigma de algunas teorías subyacentes en la toma de decisiones.

Esta toma de decisiones se realiza

SUMMARY

Even though the treatment of the risk problem dates from the origin of the economics science it is necessary to recognize that this does not happen with the uncertainty.

Thus the purpose of this paper is to introduce the basic elements of Fuzzy Mathematics and to emphasize the importance of its application to the accounting, economical and administrative disciplines, in a way that allows the change of the paradigm of some theories related to decision-making.

That decision-making takes place in three situations: certainty, where Conventional Mathematics reigns; risk where we apply Probabilistic Calculus;

en tres situaciones: la de certeza, donde reina la matemática convencional; la de riesgo, donde aplicamos el cálculo de probabilidades; y por último, la de incertidumbre, para la cual intentaremos demostrar la aplicabilidad de la matemática borrosa para efectuar un tratamiento de la incertidumbre que sincere la información a brindar.

and finally uncertainty, for which we will attempt to demonstrate the applicability of Fuzzy Mathematics to make a treatment of uncertainty that vindicates the information to afford.

PALABRAS CLAVE

Matemática Borrosa – Incertidumbre - Contabilidad – Administración – Paradigma – Sinceramiento

KEY WORDS

Fuzzy Mathematics – Uncertainty – Accounting – Administration – Paradigm - Vindication

1. CONSIDERACIONES PREVIAS

Si se parte del hecho irrefutable de que la matemática borrosa y las disciplinas mencionadas pertenecen al campo de las ciencias formales la primera y al campo de las ciencias sociales las siguientes, la relación entre ambos campos presenta serias dudas respecto a la aplicación de la matemática borrosa en la contabilidad, administración y economía para solucionar los problemas que se plantean en situaciones de incertidumbre. Justamente, Gil Lafuente asevera que: *"Nos hallamos en una época caracterizada por unos cambios sociales y económicos extremadamente rápidos y profundos que no han tenido precedente alguno en toda la historia de la humanidad. Estamos inmersos en un mundo en el cual todo acontecimiento se produce y desarrolla con tal rapidez que se nos hace prácticamente imposible saber con exactitud todo lo que nos depara el futuro. Todos los acontecimientos y circunstancias que nos esperan llevan una fuerte carga de incertidumbre.*

Para poder abordar los problemas de índole económica y social, derivados de esta incertidumbre, ya no son suficientes los conocimientos *basados en la lógica formal, la llamada matemática moderna, apoyada en esquemas mecanicistas, así como el álgebra booleana, no sirven para explicar y prever las actuaciones que deberemos llevar a cabo en el futuro y se muestran impotentes ante esta nueva forma de actuación de nuestra sociedad".**

2. UNA LÓGICA MATEMÁTICA INSUFICIENTE

Veamos las situaciones en que se lleva a cabo la toma de decisiones. Para ello, debemos entender la naturaleza del proceso decisorio, la que supone que la decisión requiere una forma de actuar entre varias alternativas posibles, que además cada alternativa puede dar lugar a una o varias consecuencias o resultados dependiendo de que ocurra alguno de los futuros posibles. Ante la situación de certeza, donde las alternativas de un problema determinado se presentan para un solo estado futuro, con una probabilidad de ocurrencia igual a uno, debe resolverse el modelo, resolverlo matemáticamente hablando. No podemos decir que hacerlo sea sencillo ni tampoco difícil, tiene sus complicaciones, pero, en cierta forma, se cuenta con el sustento de toda la matemática disponible después de dos mil quinientos años de historia. Por lo tanto, toda la matemática clásica está incluida en la solución del modelo en situación de certeza. A esta matemática clásica, por supuesto, no es posible pensarla de manera aislada, sino que está conectada con una lógica, puesto que no puede existir matemática sin lógica. La lógica que está implícita en este caso es la que nació hace dos mil quinientos años y que sigue en uso para muchos casos: la lógica bivalente (de Aristóteles hasta Boole, y sus continuadores), la del «principio del tercero excluido». Es decir, la lógica que plantea dos alternativas: es A o no A, se presenta A o no se presenta A. Este «A o no A» es el sustento de gran parte de la matemática clásica, de la que podríamos llamar convencional y que dio las soluciones del caso.

Esta lógica bivalente no quedó limitada exclusivamente a la matemática clásica, sino que nos hemos acostumbrado a utilizarla en otros casos.

Tomemos dos ejemplos[1]. Los contadores, por lo general, se manejan con un sistema de registración que es el sistema de partida doble, en el que aparecen dos posibilidades y no más, donde pareciera que deben encasillarse siempre en dos alternativas, en el A y en el no A. El segundo ejemplo sería el caso del abogado o del juez cuando pregunta a un testigo: «¿Usted estuvo presente en el momento del accidente?». A lo cual el testigo responde: «Sí, pero....». Entonces el abogado o el juez retruca: «No, no. ¿Estuvo o no estuvo? Responda sí o no». En estos casos, se encasilla la circunstancia en que esté «A o no A». A esta situaciónse llega para evitar imprecisiones: de esa manera estamos ante una situación

* Gil La Fuente, Ana María "El análisis financiero en la incertidumbre". Edit. Ariel Economía, Barcelona, 1990.

de certeza, es posible manejarse mucho mejor y el modelo mismo se torna más simplificado.

En condiciones de riesgo, existen varios estados naturales a los que se les puede asignar una probabilidad de aparición, siendo estas medidas aleatorias conocidas por quien debe tomar la decisión. Así, estaremos frente a una situación de riesgo objetivo o subjetivo, dependiendo de la base de cálculo de dicha probabilidad.

Entonces, la posibilidad de análisis de dos alternativas no es única, ya que pueden considerarse más de dos. Es allí donde aparece y resuelve el problema el cálculo de probabilidades, o la teoría de las probabilidades, o la matemática del azar, como se la quiera llamar. Entonces, quien quiera demostrar que se está saliendo de las dos alternativas, se tomará del cálculo de probabilidades, que aparentemente plantea más de dos. Tomemos un ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de obtener un tres, al arrojar un dado al aire? Es un sexto. Obsérvese que allí existen seis sucesos, seis alternativas distintas: puede salir el uno, el dos, y así hasta el seis. Por lo tanto, en otros casos, podría tener seis, muchísimas más de seis, un millón, un billón de alternativas. La gran preocupación del cálculo de probabilidades fue tratar de cuantificarlas. Entonces puede aparecer la creencia de que el esquema bivalente se ha roto. Sin embargo, no es así. Volviendo al ejemplo del dado, si la pregunta es: ¿cuál es la probabilidad de que salga el número tres?, evidentemente cuando se considera el número tres, se tienen en cuenta todas las condiciones que le puso uno de sus creadores a la definición de probabilidad, es decir, sale el tres o no sale el tres. Nuevamente, hemos caído en la lógica bivalente, en el «A o no A».

Tomemos el ejemplo de alguien que quiere estacionar el auto en una playa de estacionamiento. El cálculo de probabilidades aporta una serie de respuestas, por ejemplo: si el estacionamiento está lleno, cuál es la probabilidad de que estacione. Evidentemente, el cero por ciento. Si el estacionamiento estuviera vacío, la probabilidad que tiene esa persona de estacionar, es del cien por ciento, va a estacionar con seguridad. Si estuviera lleno y hubiera una sola plaza libre, supongamos que fuera la treinta y cuatro, ¿cuál sería la probabilidad de que estacione exactamente en el sector marcado con ese número?. Evidentemente, es del cien por cien. Si estuviera vacío, ¿cuál es la probabilidad de que estacione justamente en la parcela de estacionamiento número treinta y cuatro?: es uno en cien. Pareciera que el cálculo de probabilidades responde todas las preguntas. Sin embargo, se están suponiendo las hipótesis de Laplace; es posible constatar, en la vida real, que esas circunstancias no se dan: es un modelo demasiado alejado de la realidad.

¿Qué es lo que acontece en la realidad?. En la realidad, por ejemplo, hay lugares ocupados que no están destinados al estacionamiento y se estacionan autos en las ochavas de los sectores delimitados; es muy factible que, ante la asignación de la plaza treinta y cuatro, al llegar allí se observe que alguien ha estacionado parte de su auto en la 34, por comodidad, por no rozar al auto de al lado; por lo que habrá que estacionar parte del auto en la 34 y, tal vez, parte en la siguiente, que sería la 35. Por lo tanto, la afirmación de que alguien estacionó el auto en la plaza número 34, no es del todo verdadera; y decir que no estacionó el auto en la plaza 34 no es del todo falsa. Eso es lo que acontece en la vida real, pero el modelo de cálculo, salvo que sea posible calcular las probabilidades en forma objetiva, no resuelve el problema.

3. HACIA UNA LÓGICA TRIVALUADA

Teniendo en cuenta que ese tipo de imprecisión no está enmarcada dentro de las dos situaciones planteadas, sino definida por una situación de incertidumbre, en la cual no conocemos las probabilidades de ocurrencia respecto de los estados futuros que pueden presentarse para las diferentes combinaciones acción-resultado con las que se trabaje; no podemos dejar de reconocer que en la actualidad es bajo estas condiciones que se realiza la toma de decisiones en las disciplinas contables, económicas y administrativas. Históricamente se ha tratado de resolver este problema a través de algunos mecanismos: por ejemplo, usar el cálculo de probabilidades con algún grado de insatisfacción o satisfacción. Tomemos como ejemplo la metodología de las ciencias: se le permitió a una corriente de pensamiento muy importante salir de lo que era el inductivismo ingenuo, sacándolo de un problema que era irresoluble. El inductivismo pretendía demostrar la verdad o falsedad de las hipótesis a través de la evidencia y, entonces, nunca podía decirse que una hipótesis estuviera justificada, porque había que acumular evidencia constantemente. Esto le permitió a Carnap correrse hacia las probabilidades y establecer que una hipótesis no necesariamente debía ser verdadera, sino que podía ser probablemente verdadera, con lo que aportó una aparente solución a las indeterminaciones. Ahora bien, en ese caso fue con satisfacción que se pudo resolver un problema.

Para otros no fue tan así: aplicaban el cálculo de probabilidades, pero estaban insatisfechos, sabían que no resolvía todas las situaciones del mundo real. Tal vez, uno de los más conocidos haya sido Leibniz, quien se preguntó por la forma en que el universo se produjo, y concluyó que podría haber sido de infinitas formas distintas. De ahí, su famosa frase: «Nuestro universo tal vez no sea el mejor, pero es el más probable». Ese grado de insatisfacción también se puede notar en Einstein, que fue un gran utilizador del cálculo de probabilidades, sin el cual no hubiera podido hacer muchas de las cosas que hizo. Sin embargo, en un momento determinado, advirtió que no era la respuesta para cierto tipo de situaciones, y por eso, volviendo a las frases famosas, dijo, irónicamente: «Dios no juega a los dados».

Para introducirnos en la indeterminación, saliendo de la bivalencia, hubo que pensar en una lógica que no fuera bivaluada. Entonces, aparece el concepto de «lógica trivaluada»: verdadero, falso e indeterminado. Esta lógica plantea el concepto de vaguedad, que se desprende de las categorías verdadero, falso e indeterminado. Un autor más o menos reciente, que fue un gran analista de la vaguedad, es Bertrand Russell. Pero hay antecedentes que son más lejanos y, si se quisiera, podríamos remontarnos hasta Zenón de Elea. El tema de la lógica bivalente, del «A o no A», ya lo había analizado Zenón, quien introdujo la idea de los silogismos en cascada, en sucesión: ante un hecho en el que se puede presentar A, puede darse A o no A, pero si A, entonces se produce B; si se presenta B, B puede ser B o no B, pero si se presenta B, entonces C, y así se van escalonando en cascada los razonamientos. Esto era lo que Zenón y sus contemporáneos llamaban «paradojas sorites». El ejemplo clásico del tema pertenece a Zenón: planteaba que, ante un montón de granos de arena, se retira un grano y se lo reemplaza por un «no grano», y quedan todavía un montón de granos de arena. Si se siguieran sacando granos de arena y reemplazándolos por «no granos» de arena indefinidamente, llegaría un momento en que no habría ni «montón» ni «granos de arena», es decir, se instalaría una paradoja: en qué momento y de qué manera pasó de ser un «montón» de granos de arena a ser un «no montón».

Este tema fue analizado profusamente y el mismo Bertrand Russell tomó el caso de las paradojas sorites, reemplazando el ejemplo del montón de granos de arena por la cabellera de una persona, a la que se le retira un cabello, instalando la pregunta de cuál es el momento en que la persona pasa de tener pelo a ser calva.

4. HACIA UNA TEORIA DE SUBCONJUNTOS BORROSOS

A pesar de plantear una paradoja aparentemente irresoluble, el tema de la lógica trivaluada y la vaguedad, sirvió para establecer las bases de la llamada «teoria de los conjuntos vagos», que desarrolló Max Black. Tanto la idealización de la lógica trivaluada como el establecimiento de la teoría de los conjuntos vagos de Black no tuvieron el consenso científico necesario como para imponerse y es por eso que hoy consideramos la matemática borrosa y la teoría de los subconjuntos borrosos. Quien da el salto hacia la resolución del problema de la imprecisión es Lukasiewicz, lógico polaco que se basó en la lógica trivaluada pero, tomando esa indeterminación, la dividió en infinitas partes y estableció un continuo entre cero y uno: de esta forma se origina una lógica multivalente o multivaluada, que echó por tierra la bivaluada, el «A o no A». De esta lógica hay infinidad de ejemplos disponibles, con objetos en los cuales la imprecisión viene dada por la falta de precisión en el grado de pertenencia de dicho elemento a un determinado orden o clase.

Obviamente, la sola lógica multivalente, concebida por Lukasiewicz en los años 30, no hubiera prosperado si no se hubiera generado, consecuentemente, una teoría de los subconjuntos borrosos, y fue Lofti Zadeh, investigador del Departamento de Ingeniería de una universidad de California, quien se dedicó a esta teoría.

Teniendo en cuenta el área de las ciencias económicas, los trabajos acerca de la teoría de los subconjuntos borrosos son de vital importancia, sobre todo considerando las visiones específicas de Kaufmann y Gil Aluja. En un congreso realizado en 1996[2]: Gil Aluja presentó un trabajo en donde se refiere a lo que él llama «principio de simultaneidad gradual», el «A y no A» que hemos usado, simplificadamente, para este trabajo. Aparentemente, el principio enunciado encarna un contrasentido, en tanto que pensar en un concepto como «simultaneidad» aparentemente niega todo gradualismo, pero lo que Gil Aluja hace es usar un determinado grado de imprecisión, de alguna manera basándose en lo elaborado por Lukasiewicz y Zadeh.

Dentro de esta teoría el concepto de entropía borrosa es el que responde a la pregunta: ¿en qué medida un conjunto es borroso, mide su borrosidad y expresa la incertidumbre o desorden de un sistema?. La entropía borrosa es una cuestión de grado ya que hay conjuntos borrosos más borrosos que otros. Para entender la entropía borrosa basta la imagen de un cubo. Supongamos que el encargado de un cine debe decidir si realiza o no la función de las 15 dependiendo del estado del tiempo. Así, anuncia en el periódico: "Días lluviosos: función a las 15 "

Es sencillo tomar la decisión cuando el cielo está completamente despejado de nubes y el sol brilla radiante o cuando, por el contrario, la lluvia cae estrepitosamente. Hasta aquí, las decisiones son binarias. Llueve o no llueve, A o no A. Pero, ¿cuál será su decisión cuando el cielo está nublado y el Servicio Meteorológico dice que hay una determinada probabilidad de lluvia?. El estado del tiempo pasa de bueno o malo a un estado borroso y el encargado deberá decidir si realiza o no la función de las 15; se han convertido los bits en fits o unidades borrosas, es decir, el estado del tiempo es bueno o malo, solo en un cierto grado.

El estado del tiempo de un día es un elemento de un conjunto borroso y, si lo representamos en una dimensión tal en la que uno de los extremos es el estado "malo" y el otro es el "bueno", la representación gráfica del estado del tiempo del fin de semana se realizará a través de un cuadrado; la de los días viernes, sábado y domingo es un cubo, por ser tres los elementos del conjunto borroso (fig.1).

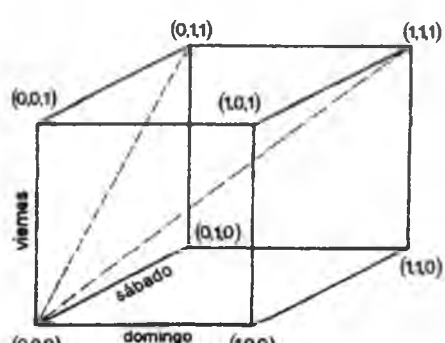

Figura 1

Si los propietarios del cine pidieran al encargado un informe sobre el estado del tiempo a lo largo de todo el mes, resultaría un hipercubo de treinta dimensiones. No es posible dibujar un cubo de más de tres dimensiones y ocho esquinas, pero no hace falta para entender la estructura borrosa. Las esquinas del cubo, son A o no A, y su entropía borrosa es igual a cero. Los demás puntos del cubo son borrosos o grises en cierto grado. La entropía borrosa muestra que cuanto más cerca se está del punto central del cubo más borroso es el conjunto; y menos cuanto más cerca se está de las esquinas.

5. CAMBIOS, NOVEDADES Y JUSTIFICACIÓN

Considerando que la matemática borrosa está disponible, a pesar de que hay cuestiones por pulir y terminar de demarcar, la pregunta que cabría hacerse es sobre la novedad, sobre lo nuevo del planteo que proponemos.

Lo novedoso, desde nuestra perspectiva, está en no plantear una solución más, un nuevo criterio, sino directamente proponer un cambio prescriptivo y descriptivo a nivel de la teoría, aportando el modelo y los mecanismos para dar solución a la incertidumbre aplicando la matemática borrosa.

Esta propuesta de cambio está sustentada en varias justificaciones posibles, tanto desde el punto de vista teórico, como del metodológico y del práctico, apoyados en la metodología de la ciencia.

Un modo de justificación posible es adoptar un punto de vista «duro» respecto de las ciencias, y observar de qué manera esas posturas permiten justificar o introducir la matemática borrosa en el tratamiento de la incertidumbre. Para ello, consideramos pertinente adoptar los criterios de dos autores: Karl Popper y Mario Bunge.

A partir de la investigación bibliográfica, es posible establecer que Bunge, por ejemplo, es capaz de admitir imprecisiones, y que está dispuesto a hacerlo. Entonces si una postura dura es capaz de admitir ese grado de imprecisión, mucho más lo hará una corriente de pensamiento más laxa, más flexible, que encarara el tema de una manera más conveniente a nuestros fines.

Del mismo modo ocurre con Karl Popper, que cuando estudia el método de las ciencias sociales, supone que hay que apartarse de los métodos convencionales que él mismo propone para las ciencias duras (como la matemática, la física, etc.). Así, establece un sistema, que es el del ensayo y error, el de la crítica fundada de las proposiciones de la teoría. Mientras la teoría soporte la crítica y no se compruebe su falsedad, debe ser aceptada, al menos provisoriamente, hasta que caiga.

Para pensar en una justificación metodológica, nos basamos sí en una postura más flexible que las enunciadas anteriormente, como es la posición de Kuhn, que directamente abandona el concepto tradicional de ciencia. Para Kuhn, la ciencia es una actividad llevada a cabo por determinado grupo de personas. Hay una serie de elementos dentro de esa posición que admiten el uso de lógicas distintas, es decir, no necesariamente una, y mucho menos ésta que usamos aquí; admiten la multiplicidad de lógicas empleables. La debilidad de esta justificación podría señalarse en que los planteos de Kuhn se basan, casi exclusivamente, en la física y no en las ciencias sociales; ante esto hemos adoptado el criterio de Mitroff y Killman, dos teóricos de la administración. Estos autores hicieron una investigación de campo sumamente amplia y determinaron cuáles son los modelos investigativos que estaban siendo usados por la comunidad científica y lograron determinar cuatro, de acuerdo a un ordenamiento establecido en función de ciertos parámetros que adoptaron previamente, donde uno de esos parámetros de orden es el referido a la lógica empleada. Ante esto, no se inclinan por ninguno de ellos, sino que proponen, fundamentalmente, la combinación de los mismos, y sostienen que en un trabajo de investigación determinado, están presentes, de alguna manera u otra, todos los métodos que habían logrado clasificar.

6. APORTES Y PROYECCIONES

Supongamos que se hizo la reformulación teórica; supongamos también, que está justificada, la pregunta sería cuál es el aporte de este cambio. Desde nuestra perspectiva, consideramos que el aporte más importante de esta reformulación es el sinceramiento. Si consideramos los criterios que se han usado históricamente y que se usan para resolver la incertidumbre, veremos que adolecen de fallas, imprecisiones y, en algunos casos, arbitrariedad en cuanto a su mecánica, consistiendo en convertir un problema de decisión en condiciones de incertidumbre en un problema bajo riesgo, para así aplicar las técnicas ya mencionadas. Es decir que, ante la introducción de datos totalmente imprecisos, se obtiene un resultado, o una conclusión, que es un dato cierto. En cambio, a partir de esta reformulación basada en la matemática borrosa, ante la consideración de datos inciertos, imprecisos, el resultado obtenido también lo es; no se está forzando ningún tipo de situación, ni se la considera en un marco idealizado.

Por lo tanto, estimamos que el aporte más importante está dado por este sinceramiento, por tener la propuesta justificada metodológicamente y por la posibilidad de presentación pública que tiene. Considerando la postura de Kuhn, podríamos afirmar que ha empezado la revolución. Es decir, pensamos que está dado el pequeño primer paso como para que el cambio se produzca, y, a partir de aquí, se piense en esta circunstancia.

Para lograr este objetivo se publicará nuestro trabajo “Aplicaciones de la Matemática Borrosa a las disciplinas Contables y Administrativas - Primera Parte”. En dicho estudio desarrollamos los conceptos de números imprecisos e intervalos de confianza como primer reconocimiento de la indeterminación, para luego abordar la teoría de los subconjuntos borrosos que, como hemos mencionado, constituye el marco conceptual de la matemática borrosa. A continuación introducimos el concepto de número borroso que, estimamos, se convertirá en la herramienta que permita la toma de decisiones en situación de incertidumbre; para posteriormente relacionar los números borrosos con el cálculo de probabilidades y conceptualizar, de este modo, los números híbridos. Finalmente, presentamos algunas propuestas de aplicación de la matemática borrosa a los campos contable, económico y administrativo, que constituirán el objeto de la segunda parte de nuestra investigación.

NOTAS

(1) En las ejemplificaciones, para lograr una mejor explicación y aprehensión de lo expuesto, forzaremos algunas situaciones tal vez exageradas o gruesas.

(2) Nos referimos al congreso organizado por la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy, conjuntamente con la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA.